



示例4:

## 累積誤差

- 目 標:覺察由於應用公式時所產生的累積誤差
- 學習階段:3
- 學習單位:面積和體積的簡單概念
- 所需教材:動態幾何軟件如 Geometer's Sketchpad (簡稱 Sketchpad)、 直尺(祇有厘米刻度)及檔案 error01c.gsp

預備知識:誤差的意義

活動內容:

 教師著學生在紙上繪畫一長方形 PQRS,其中 SR=6cm及 QR=4cm。學生以祇有厘米刻度的直尺繪畫長方形(看下 圖)。



2. 教師向學生提出以下問題:「長方形的面積是多少?」。

 3. 學生應給出面積為 24cm<sup>2</sup> 的答案。教師提問學生圖形的 真實面積是否必定為 24cm<sup>2</sup>。學生在此可能會有以下疑問:在繪畫圖形或量度時可能產生誤差。

4.1

- 4. 教 師 繼 續 提 問 學 生 如 何 求 長 方 形 面 積 的 累 積 誤 差 。 教 師 進 一 步 解 釋 累 積 誤 差 的 意 義 。 (名 詞 「 累 積 誤 產 」 是 指 由 量 度 得 出 的 長 度 及 / 或 闊 度 時 所 產 生 的 間 接 誤 差 。)
- 5. 教師與學生簡略地重溫由量度得出的誤差問題。由於量度長度/闊度時是準確至最接近的 cm,所以最大誤差值為0.5 cm。教師可與學生重溫長度/闊度所涵蓋的範圍,即 QR介乎於 3.5 cm與4.5 cm之間,而 SR 則介乎於 5.5 cm 與6.5 m之間。
- 6. 教師提問學生面積的累積誤差是否為 0.5cm ×0.5cm = 0.25cm<sup>2</sup>。教師邀請學生向全班發表他們的意見。教師在這時可不作任何評論。
- 7. 教師派發工作紙給學生及略為解釋有關活動。
- 8. 學生須要利用工作紙及以拖曳在 Sketchpad檔案 error01c.gsp內 長方形的頂點 R 的方法,來探究誤差的問題(看下圖)。

🔷 The Geometer's Sketchood - [Ecolis.gop]								비운 논												
E E	114	Diplo	Qu	utrat	Institu	m J	feature	(2np	h 🗎	ni He	¥								1	利区
N	PC	RS	的道	1 實面	禰	= xy	= 29	25 0	.m <sup>2</sup>	22	85	25	(差 =	5.2	5 cm	it.		<u>+</u> )		+
•	PO	RS	的非	<b>能度</b> 值	讀	= ab	= 24	.00	cm <sup>2</sup>		80	+	1.1	-				+)	+	÷.
	•	•	Ŧ	1	+		1	*	*			*		÷.		4			*	1
	1	35	3	383		1	121	*			<u>89</u>	3	2	+1:		33			68	
2	εŪ	ě.	×	2963	$\left( \mathbf{k}\right) $	6	00	$\left  i \right $	P.	-	_	-	-	s	í.	3	${\bf e}_{i,j}$	$\left( i \right)$		ř.
Y	12	22	2	222	1	12	1121	0		4	23	4				12	27	4	0	1
	5	35	3	- 22		3	201	33			÷	1		h	- 5 cm	1		÷	3	t,
	e.	+	÷.		$(\mathbf{k})$	$\overline{(+)}$	200	46			+	4				4		$\pm$	÷	÷
	13	(2)	12	121	$\mathcal{D}$	12	121	$\mathcal{C}^{1}$		14	23	12			y=8.50	(cm	2	1	2	
	53	1	3	373	13	3	231			1	ŧ.	1				1		t	it.	t.
	ē;	$(\mathbf{r})$	÷		$(\mathbf{r})$	$\sim$	300	$\overline{t}$					-	1		÷		(+)	1±	t.
	2		8	143	$\widetilde{s}$	9	64)	40	0		4 rm		_	R.	+	+		÷.	32	E.
	25	55	8	87.5	0		1.52	0	5				_		15	8	5	0	35	
										3=4	150 cm									
100						T.		T.,	. 1.			1		τ.		1				

9. 學生可以發現到當 R 被拖曳到圖形 PQRS 達到最大面積的位置時(即 6.5cm×4.5cm),面積的誤差為 5.250cm<sup>2</sup>。當 R 被拖曳到圖形 PQRS 達到最小面積的位置時(即 5.5cm×3.5cm),其誤差為 4.750cm<sup>2</sup>。故此,面積的最大累積誤差值為 5.25cm<sup>2</sup>。

- 10. 教師引導學生觀察到當原有長方形的闊度 *a* 及長度 *b* 在 改變時,最大累積誤差也隨之而改變。(可參看工作紙中 的第5點。)
- 11. 教師要求學生向全班描述他們的發現,並引導學生總結
  - (a) 雖然長度及闊度的誤差值均為 0.5cm,但面積的誤
     差一般不是 0.5cm×0.5cm (= 0.25cm<sup>2</sup>);
  - (b) 累積誤差值並非是長度誤差及闊度誤差的直接乘 積。

教師須向學生強調求最大累積誤差的方法。

## 工作紙:累積誤差

- 1. 開啟 Sketchpad 檔案 error01c.gsp。
- 2. 你會見到一個闊度為 a=4cm, 而長度為 b=6cm 的長方形,
  而 PQRS 是另一個長方形,其真實闊度QR = x 及真實長度
  SR = y(看下圖)。



3. 拖曳頂點 R 以觀察其中變化,將結果記錄在下表上。

闊 度 (x cm)	長度(y cm)	PQRS 的面積 (xy cm <sup>2</sup> )	相差 (cm <sup>2</sup> )

4. 求長方形面積的最大累積誤差。

 5. 拖曳 P 點至其他位置以改變原本長方形的闊度 a 及長度
 b。寫出 a 及 b 之涵蓋範圍。相對於問題 4,長方形的最 大累積誤差值有沒有改變? 教師注意事項:

- 本示例的目的是幫助學生獲得運用公式「長方形面積=
   長度×闊度」時會產生累積誤差的直觀意念,並且知道累 積誤差並非由長度誤差及闊度誤差直接相乘所得。
- 如果學生已學「近似與誤差」這個學習單位,教師可提 醒學生名詞「誤差」及「最大累積誤差」分別相當於「絕 對誤差」及「最大絕對誤差」。
- 教師應提醒學生, x 與 y 應為一個小數位的數。在屏幕上 x 與 y 以兩個小數位顯示,是因為軟件的限制,以便顯示 x 與 y 的乘積的兩個小數位數值。
- 4. 在這個活動,已假設長方形的長度及闊度的量度是準確 至最接近的 cm,故此,在應用檔內,P 點只可拖曳至一 些位置,令 a 及 b 的數值均為整數。教師可選擇視窗中 的 Graph | Hide Grid 去隱藏網格點。這時,拖曳 P 點會引致 長方形的 a 及 b 的數值變成非整數值。
- 5. 在這個檔案中,當學生拖曳 R 點時, a 及 b 的數值是符合「活動內容」第五點所指長度及闊度範圍的位置。當圖形達到最大面積時,面積誤差為 5.250cm<sup>2</sup>。當圖形達到最小面積時,面積誤差為 4.750cm<sup>2</sup>。由此找出最大累積誤差及它的值為 5.25cm<sup>2</sup>。