



示例 9：

平面上的反射對稱和旋轉對稱

目 標：探究平面圖形的反射對稱和旋轉對稱的關係

學習階段：3

學習單位：變換及對稱

所需材料：(1) 印有多邊形的顏色紙
(2) 展示軟件所需的電腦及 2D_Sym 內的檔案

預備知識：反射對稱和旋轉對稱的簡單概念

活動內容：

1. 教師幫助學生重溫平面圖形的反射對稱概念。對於部分不熟識課題的學生，教師可用日常生活圖片作示例，如老虎的斑紋、蝴蝶及葉紋等(圖 1a 至 1c)和用 2D_Sym 內的檔案演示反射的效果。



圖 1a



圖 1b



圖 1c

2. 教師將學生分組，並給予工作紙及已預先剪裁的不同類別的多邊形，要求他們探討那些圖形的反射對稱問題。學生可透過不同方法如摺紙等，來找出各圖形的所有對

稱反射軸，並將答案寫在工作紙表內的第一欄。

- 教師與學生討論答案，並可使用 2D_Sym 內的電腦檔案來展示各圖形的反射對稱軸（圖 2）。



圖 2

- 除反射對稱外，學生亦須找出各多邊形具有多少折式的旋轉對稱性質及將答案填寫於工作紙表內第二欄。
- 教師邀請學生展示他們的答案。教師亦可使用 2D_Sym 內的電腦檔案來展示各圖形的旋轉對稱情況（圖 3）。



圖 3

- 教師引導學生作出以下的結論：
 - 一個正 n 邊形具有 n 條反射對稱軸。
 - 若 n 為奇數，正 n 邊形的反射對稱軸為角平分線。若 n 為偶數，正 n 邊形的對稱軸可以是角平分線或中線。

(c) 一個正 n 邊形具有 n 折式旋轉對稱性質。



圖 4

7. 教師可引導學生觀察

(a) 如果圖形有多於一條反射對稱軸，這些對稱軸必定在同一點相交。

(b) 相交點必定是旋轉中心。

(見圖 3 及圖 4)

從而與學生討論下列猜想：「有兩條或以上不同反射對稱軸的圖形一定具有旋轉對稱性質」。教師可挑戰學生這猜想的逆推論是否成立及要求他們提出反例。

工作紙：多邊形的反射對稱及旋轉對稱

在給出的多邊形，求反射對稱軸的數目及旋轉對稱的折式數目：

	多邊形	反射對稱軸 的數目	旋轉對稱的 折式數目
(a)	直角三角形		
	等腰三角形		
	任意三角形		
	等邊三角形		
(b)	平行四邊形*		
	等腰梯形*		
	菱形*		
	長方形*		
	鳶形*		
	正方形		
(c)	等邊五邊形*		
	等角五邊形*		
	正五邊形		
(d)	等邊六邊形*		
	等角六邊形*		
	正六邊形		
(e)	等邊八邊形*		
	等角八邊形*		
	正八邊形		
(f)	正七邊形		

* 假設沒有其他特徵。

教師備註：

1. 教師可使用附錄乙來預備多邊形。

2. 工作紙的答案如下：

	多邊形	反射對稱軸 的數目	旋轉對稱的 折式數目
(a)	直角三角形	0	--
	等腰三角形	1	--
	任意三角形	0	--
	等邊三角形	3	3
(b)	平行四邊形*	0	2
	等腰梯形*	1	--
	菱形*	2	2
	長方形*	2	2
	鳶形*	1	--
	正方形	4	4
(c)	等邊五邊形*	0	--
	等角五邊形*	0	--
	正五邊形	5	5
(d)	等邊六邊形*	0	--
	等角六邊形*	0	--
	正六邊形	6	6
(e)	等邊八邊形*	0	--
	等角八邊形*	0	--
	正八邊形	8	8
(f)	正七邊形	7	7

3. 若學生已對此課題有一定認識，教師可跳過活動的第一點而直接要求學生填寫第一欄。教師可要求學生使用其他策略，如鏡子或動態幾何軟件如 *Sketchpad* 內的反射功能來求反射對稱軸。所提供的 2D_Sym 內的檔案只是其中一個方法。
4. 在使用 2D_Sym 內的檔案時，部分圖形內的線並非反射對稱軸(圖 5)。這些線為反射對稱軸的反例，教師可輕按反射方格內的 I_1 以展示為何這些線不能稱為反射對稱軸。教師須提醒學生即使以任何其他線作反射，它們都沒有反射對稱性。在討論沒有具有旋轉對稱性質的圖形時，在圖上加上的點亦只為方便顯示圖形不重合的問題。教師須提醒學生即使以其他點旋轉，這些圖形都不會重合。



圖 5

5. 再者，這活動的主要目的是讓學生找出反射對稱和旋轉對稱的關係。教師應讓學生有足夠時間討論有關猜想。
6. 在驗證「有兩條或以上不同反射對稱軸的圖形一定具有旋轉對稱性質」的逆推論是否成立時，教師可用英文字母如 “N,Z”或平行四邊形等作反例。這兩個字母或圖形具有旋轉對稱但沒有反射對稱性質。
7. 除了多邊形外，教師可給學生一些英文字母，並要求他們找出字母的反射對稱軸的數目作為增潤活動；
 - (a) A, M, T, U, V, W, Y

- (b) B, C, D, E, K
- (c) H, I, O, X
- (d) N, S, Z
- (e) F, G, J, L, P, Q, R

教師可在示例 8 附件中得出部分特大的字母。

8. 增潤活動內各組別字母的答案如下：

- (a) 只有垂直反射對稱軸（例如：字母 A）
- (b) 只有縱向反射對稱軸（例如：字母 E）
- (c) 有垂直亦有縱向反射對稱軸（最少兩條對稱軸，同時具有旋轉對稱性質）（例如：字母 H）
- (d) 只有旋轉對稱性質（例如：字母 Z）
- (e) 沒有反射對稱性質亦沒有旋轉對稱性質（例如：字母 P）

9. 若學生有興趣於探討多邊形反射對稱的性質，教師可邀請這些學生驗算以下猜想的真確性：

「一個多邊形的反射對稱軸的數目一定可以整除多邊形的邊的數目」。換句話說「唯有 k 整除 n ，一個 n 多邊形才有 k 條反射對稱軸」。

教師可在期刊 *The Mathematical Gazette* Vol.77 No. 480 (1993) 第 364 頁中找到這個猜想的證明。

參考資料：

書籍：

1. 黃毅英 (1997)。《邁向大眾數學的數學教育》。台灣：九章出版社。
2. 項武義 (1994)。《幾何學的源起與發展》。台灣：九章出版社。
3. Bezuska, S. Kenney, M. & Silvey, L. (1977). *Tessellations: The Geometry of Patterns*. Oak Lawn, IL: Creative Publications.
4. Crowe, D. (1986). *Symmetry, Rigid Motions, and Patterns*. Arlington, MA: COMAP.
5. Haber, H. & Kane, G. (1986). Is Nature Super Symmetric? In *Scientific American*, 1986 June: pp. 52-75
6. Tarasov, L. (1986). *This Amazingly Symmetrical World*. Moscow: Mir Publishers.
7. Thomas, D. (1980). Mirror Images. In *Scientific American*. 1980 December: pp.

- 206-30.
8. Weyl, H. (1980). *Symmetry*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
 9. Wilgus, W. & Pizzuto, L. (1997). *Exploring the Basics of Geometry with Cabri*. Texas Instruments.
 10. Wiltshire, A. (1989). *Symmetry Patterns*. Norfolk, England: Tarquin Publications.
 11. Wyatt, K.W. et. al. (1998). *Geometry Activities for Middle School Studies with the Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press.

光碟：

在 **Fun with Learning 1998** 光碟內的 *Shape*。

網址：

1. 對稱及圖案－有關東方地氈的藝術：

<http://forum.swarthmore.edu/geometry/rugs/>

這網頁提供建立對稱概念及有關對稱例子的豐富資料。在其上亦有詳細圍邊及圖案的解釋。在網頁內亦可找到製作密鋪圖形所使用的電腦軟件如 Claris Works, HyperCard, Hyperstudios, PC PaintBrush, Logowriter等及在線導修。

2. <http://www.bbc.co.uk/schools/gcsebitesize/maths/shape/symmetryrev.shtml>
這網頁提供有關對稱概念的活動，其中包括短練習、例子及動畫。
3. <http://www.learn.co.uk/>