



示例 19：

變換概念在幾何證明上的應用

目 標：應用變換概念來進行幾何證明

學習階段：3

學習單位：四邊形

所需教材：無

預備知識：(1) 判定全等條件的基本認識
(2) 變換的基本概念
(3) 正方形性質的基本概念

活動內容：

1. 教師提醒在進行幾何證明時的一般步驟，即：分辨給出條件及證明的要求。
2. 派發有以下問題的工作紙 1 給學生。

在圖 1, $ABCD$ 為正方形。
點 E 及 F 分別在 AB 和 CB 上。
已知 $\angle ADE = \angle EDF$,
證明 $AE + CF = DF$ 。

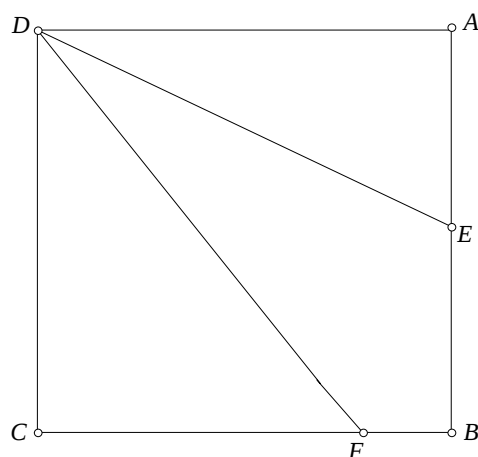


圖 1

3. 教師要求學生研究問題和判別：

- (a) 哪些是給出的條件；
 - (b) 哪些是須要證明的部分。
4. 教師可讓學生嘗試解決問題。如果學生能自行解決問題，教師可與學生討論有關解題策略。否則，教師須引導學生如何引用變換的概念來解決這問題。
5. 教師可提問以下問題：
- (a) 在圖 1，給出的條件與要求的證明有沒有聯繫？
 - (b) 可否連繫 AE ， CF 兩條線段？
 - (c) 可否將某些三角形進行變換以連繫以上兩條線段？哪些三角形可使用？
 - (d) 如果考慮 ADE 和 DCF ，可以做些「什麼」以「結合」兩個三角形為一個？如何達到？

通過以上討論，教師引導學生得出將 ADE 繞 D 點以順時針方向旋轉 90° 的策略(圖 2)。

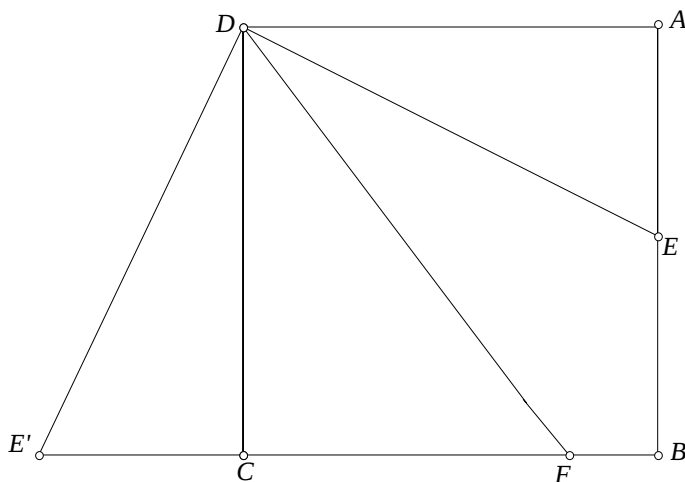


圖 2

6. 在變換後，教師提問學生 DCE' 與 DAE 是否相等(全等)和有關係理由。學生須討論 $E'CF$ 是否直線。其後，學生須回答“ $AE + CF = DF$ ”的要求有何可見的改變。
7. 對於能力一般或較高的學生，教師可要求他們完成工作紙上的證明。但教師可向能力稍遜的學生提問以下問

- 題，以幫助他們逐步完成解題：
- (a) 因為 $AE + CF$ 變為 $E'C + CF$ ，即 $E'F$ ，哪個三角形可用作連繫 $E'F$ 和 DF ？
 - (b) 考慮 $DE'F$ ，如果我們想證明這個三角形的兩條邊相等，我們須做些什麼呢？
8. 在解決工作紙 1 的問題後，教師可要求學生完成工作紙 2 的相似問題。
 9. 教師邀請學生展示他們的題解。教師從而總結所用的步驟。
 10. 教師可應用另一變換：平移來進行幾何證明的問題(見圖 3)。

在圖 3， $AB = AC$ 。點 D 在 AB 及 E 在 AC 的延長線上，並 $DB = CE$ 。
證明 $DE > BC$ 。

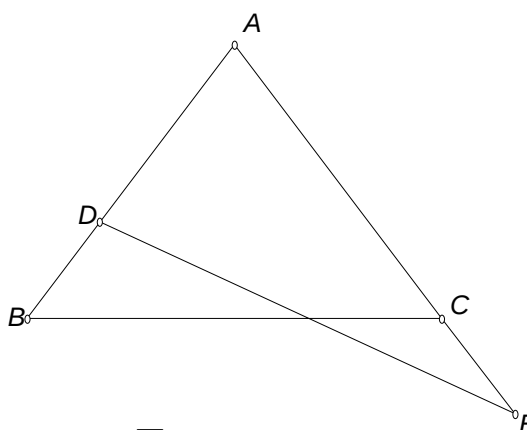


圖 3

11. 教師派發工作紙 3 給學生，並與學生一起討論解決問題的方法。讓學生在提供空位中填寫證明步驟(可參閱教師注意事項內的有關題解)。教師從而與學生討論應用變換概念進行證明的好處
12. 對於能力較高的學生，教師可提供另外兩條問題給他們作為增潤活動或習作。題目如下：

在圖 4， $ABCD$ 為正方形。
已知 E 是正方形上的一點而令 $\angle ECB = \angle EBC = 15^\circ$ 。應用變換技巧，證明 $\triangle ADE$ 為等邊三角形。

(提示：在圖中，加上正方形的中心點 O 。)

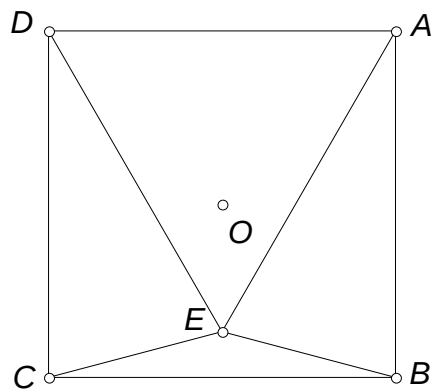


圖 4

在圖 5，在等腰 $\triangle ABC$ 中，頂角 $\angle A = 100^\circ$ 。作 $\angle B$ 的角平分線並交 AC 於 D 。求證 $AD + BD = BC$ 。

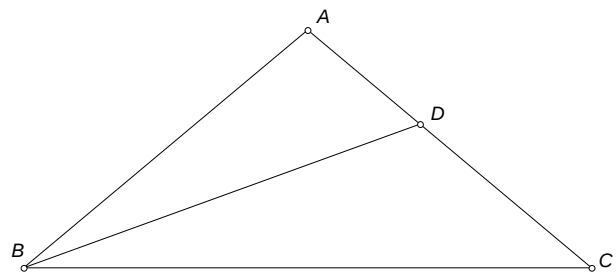
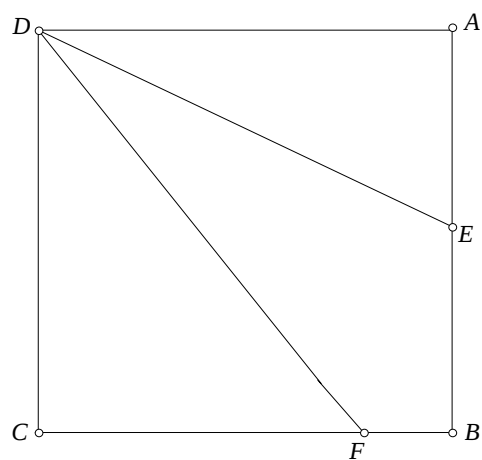


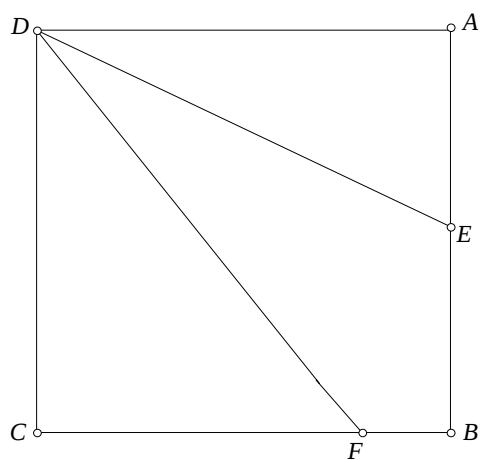
圖 5

工作紙 1：應用旋轉作幾何證明

在右圖， $ABCD$ 為正方形。
 點 E 及 F 分別在 AB 和 CB 上。
 已知 $\angle ADE = \angle EDF$ ，
 證明 $AE + CF = DF$ 。

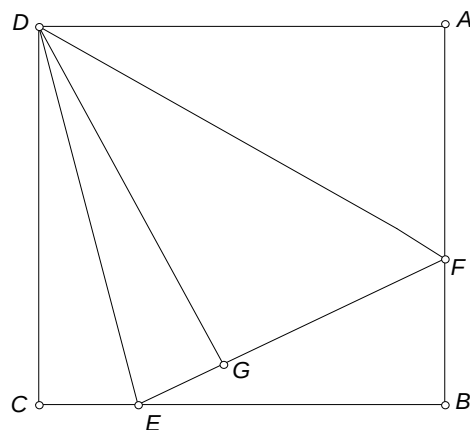


題解：

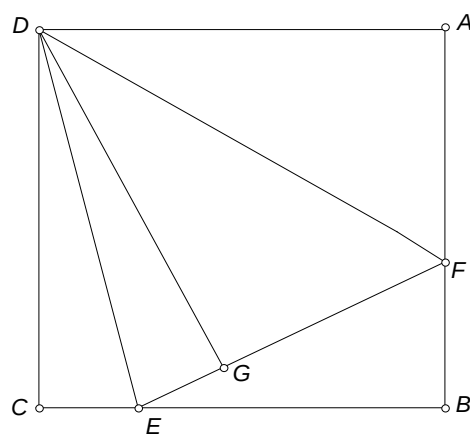


工作紙 2：應用旋轉作幾何證明

在右圖， $ABCD$ 為正方形。
 點 E 及 F 分別在 CB 和 AB 上。
 已知 $\angle FDE = 45^\circ$ 和 $DG \perp EF$ ，
 證明 $DG = DC$ 。

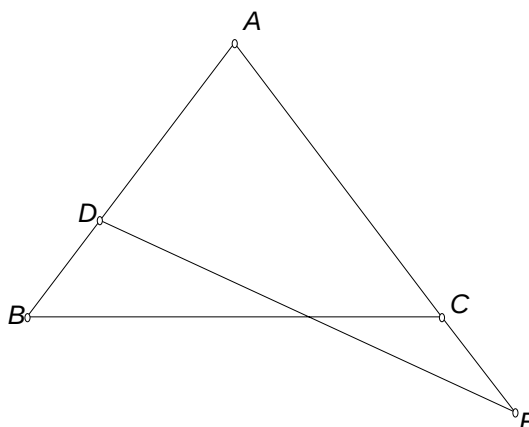


題解：

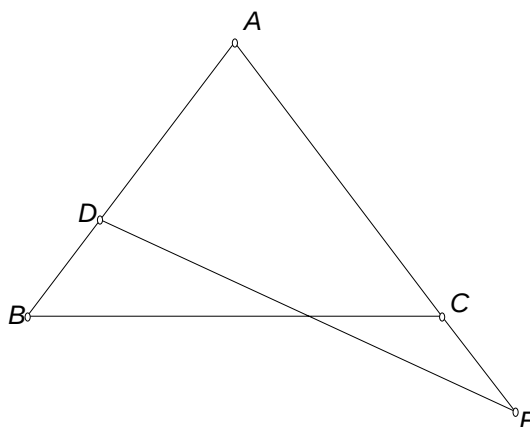


工作紙 3：應用平移作幾何證明

在圖中, $AB = AC$ 。點 D 在 AB
及 E 在 AC 的延長線上, 並
 $DB = CE$ 。
證明 $DE > BC$ 。



題解：



教師注意事項：

1. 在《課程綱要》，對稱及變換是一個新的課題。雖然學生可能覺得這課題不難學習，但是學生不容易將這概念融入其他幾何問題。在解決幾何問題時，學生經常以為圖形是靜態的，並且不能靈活地在解非常規問題時，加上輔助線或圖形以連繫重要的條件。這示例說明學生如何應用幾何圖形的變換在分析及解題時建立適當的連繫。
2. 工作紙 1 的題解建議如下：

	證明：$AE + CF = DF$ 主要步驟： 1. 將 $\triangle ADE$ 繞 D 點以順時針方向旋轉 90°。 2. 證明 $\triangle ADE \cong \triangle CDE'$ 和 $E'C, F$ 是一直線。 3. 證明 $AE = E'C$ 及 $AE + CF = E'F$。 4. 證明 $\angle DE'F = \angle FDE'$。 5. 因此，證明 $E'F = DF$，由此得證。
--	---

除轉動 $\triangle ADE$ 外，亦可旋轉 $\triangle DCF$ 而得出 $\triangle DAF'$ ，證明方法與以上建議答案相若。

3. 在引導學生解題時，提問問題以連繫給出條件及證明要求是十分重要的。教師須讓學生有足夠時間去計劃不同的解題策略，而不應在學生不能即時想出解題計劃時給予答案。然而，教師須引導學生集中如何以變換方法解題。
4. 將 $\triangle ADE$ 變換而形成 $\triangle CDE'$ 時，問題的重點被轉化在 $\triangle DE'F$ 上。將一個問題轉化成另一問題亦是其中一種重要的解題策略。

5. 工作紙 2 的建議題解：

	證明：$DG = DC$。 主要步驟： 1. 證明 $CDE + FDA = 45^\circ$。 2. 將 ADF 繞 D 點以順時針方向旋轉 90°。 3. 證明 $DEF \cong DEF'$。 4. 由此，證明 $DG = DC$。
--	--

6. 教師須留意解工作紙 3 的問題是須要對三角形不等式有基本認識的。工作紙 3 的題解如下：

	證明：$DE > BC$。 主要步驟： 1. 將 BC 沿 BD 平移到 DF，並連結 CF。 2. 因此，$BCFD$ 為平行四邊形，證明 $CF = CE$。 3. 連結 EF 及證明 $f = e$。 4. 證明 $\angle DFE > \angle DEF$，因而證明 $DE > BC$。
--	--

7. 「活動內容」中圖 4 的問題解決方法建議如下：

	證明：DEA 為等邊三角形。 主要步驟： 1. 將 EBC 繞 O 點以逆時針方向旋轉 90°，形成 $AE'B$。 2. 證明 $EB = E'B$。 3. 證明 $E'BE$ 為等邊三角形。 4. 證明 $E'E = E'A$。 5. 求 $AE'E$ 和 $E'AE$。 6. 證明 $EAD = 60^\circ$。 7. 相同地，證明 $EDA = 60^\circ$。 8. 求 DEA。 9. 由此，證明 DEA 為等邊三角形。
--	--

這問題亦可作為以不同策略解題的一個好例子。有關題解可在由香港數學教育學會出版的《數學教育》第 9 期中的“Different Methods to Solve a Plane Geometry Question”中找到。

8. 「活動內容」中圖 5 問題的解決方法建議如下：

	證明：$AD + BD = BC$。 在證明所需命題前，先令 AD、BD 及 BC 在同一線段上。 主要步驟： 1. 將點 A 以 BD 作反射成點 A'，證明 $AD = A'D$。 2. 將 BD 以點 B 旋轉直至點 D 在 BC 上，可得 $BE = BD$。 3. 證明 $\triangle DEC$ 為等腰三角形。 4. 證明 $DE = DA'$，因而證明 $AD + BD = BC$。
--	--

參考資料：

1. 蘇和平 (2000)。旋轉變換在平面幾何中的應用。《數學教學研究》。2000 年第 6 期。中國：西北師範大學。
2. 曹翔業 (1997)。談認記圖形的教學。《中小學數學》(初中版)。1997 年第 12 期。中國：中國教育學會。
3. 初中數學奧林匹克刊授講座 (初二) —— 平移、對稱與旋轉 (2000)。《中小學數學》(初中版)。2000 年第 6 期。中國：中國教育學會。
4. Chung, C.M. & Chiu, W.M. (1999). Different Method to solve a Plane Geometry Question. In *EduMath 9*. Hong Kong: Hong Kong Association for Mathematics Education.