



示例 20：

三角形內的線

目標：(1) 探究和認識中線的共點性質及形心分割中線的比
(2) 證明形心分割中線的比為 2:1

學習階段：3

學習單位：演繹幾何簡介

所需教材：動態幾何軟件如 *Geometer's Sketchpad* (簡稱 *Sketchpad*)

預備知識：(1) 中線的意義
(2) 對判定三角形全等或相似的條件有基本認識

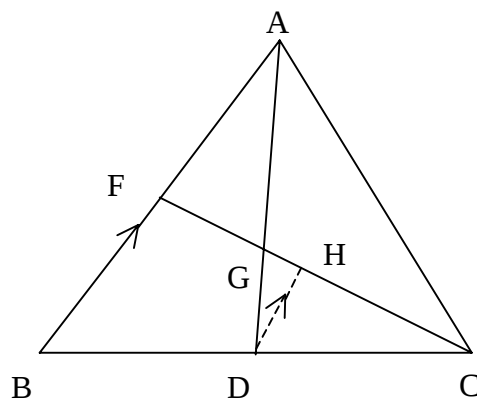
活動內容：

1. 教師提問學生有關三角形中線的意思，並解釋這個活動的目的。
2. 教師分發工作紙給學生。學生須要根據工作紙繪圖 1 的指示構作三角形內的中線。教師可邀請一些熟悉使用 *Sketchpad* 的學生去幫助其他同學。學生可利用這圖形來探究中線的共點性質。
3. 學生須要完成工作紙內的探究活動 1：
 - (a) 當你構作第三條中線後，你可有觀察到一些特別的地方？
 - (b) 移動三角形的頂點，你觀察到什麼？
 - (c) 寫下一個關於三角形內中線的猜想。
4. 當學生完成探究1後，教師引領學生討論三角形內中線相交的情形。學生應得出中線共點的結論及知道這一相交點的名稱，而這一現象在任何三角形都是正確的。

5. 學生拖曳三角形的頂點，作出其他有關形心性質的猜想。如果學生沒有任何頭緒時，教師可引導學生思考關於邊長的問題。教師應給予學生足夠時間，讓他們作出猜測。當學生對形心劃分中線的比有一個初步的概念後，教師可邀請他們分享驗證這些猜想的方法。之後，學生可依著工作紙繪圖 2 及探究 2 的指示來驗證他們的猜想：
- (a) 計算 $\frac{AG}{AD}$ ， $\frac{BG}{BE}$ 和 $\frac{CG}{CF}$ 的值，你有什麼發現？當你改變三角形的形狀時，這些比有沒有改變？
- (b) 計算 $\frac{AG}{GD}$ ， $\frac{BG}{GE}$ 和 $\frac{CG}{GF}$ 的值。對於形心 G 劃分三角形的中線的情形作一猜想。
6. 完成探究 2 之後，教師要求學生總結他們的發現：「對於任意三角形，形心分割中線的比為 2:1 而中線必然共點」。教師須幫助學生總結出對於任意三角形，以上比的數值不變。教師應提醒學生使用軟件量度值，只是其中一種試驗猜想是否正確的方法及引導學生明白這方法的限制。
7. 教師引導學生設計不同的策略來證明每一個發現，並可討論各策略的優劣。
8. 對於一般能力的學生，教師可要求他們使用三角形的相似性及全等性來進行證明(參看教師注意事項第 2 點，方法 1 及 2)。
9. 教師可給予這些學生一些提示。例如，於教師注意事項第 2 點的方法 1 中，教師可利用“倒著幹”方法，透過提問以下的問題，引導學生揀選合適的策略(參看下圖)：
- (a) 如果我們想證明 $AG:GD=2:1$ ，應考慮哪一對三角形？只考慮 $\triangle AFG$ 和 $\triangle GDC$ 是否已具備充份條件來證明猜想？應否在圖上加上其他的輔助線？
- (b) 如果我們加上一條平行 AB 的線 DH ，應考慮哪一對三角形以證明這個比？如果我們想透過證明 $\triangle DHG \sim \triangle AFG$ 來驗證這個比，需要什麼條件來證明三角形的相似性？可考慮其餘那對三角形作為連結橋樑？
- (c) 如果 $\triangle CDH$ 和 $\triangle CBF$ 是連結橋樑，這兩個三角形的那些關係可幫助我們證明？ $BF:DH$ 的值是什麼？ $AF:HD$ 的值

是什麼？

(d) 我們可以證明 $\triangle DHG \sim \triangle AFG$ 嗎？ $AG:GD$ 的值是什麼？



10. 對於能力較高的學生，教師可要求他們使用多於一種方法來進行證明(參看教師注意事項第 2 點，方法 1 至 4)。
11. 能力較高的學生可嘗試自行證明有關發現。然而，教師應在他們有困難時給予適當提示。

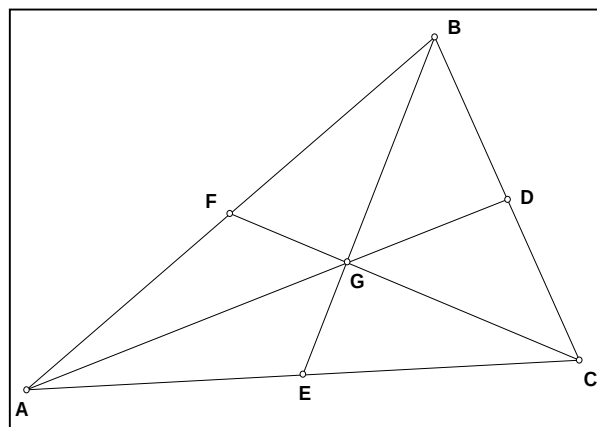
工作紙：探究三角形內中線的性質

在這張工作紙中，你要覓得三角形內三條中線之間的關係。步驟如下：

- 用 *Sketchpad* 軟件依指示構作三角形內的中線。
- 使用這圖形來探究中線的關係。
- 將你的答案寫在工作紙內。

繪圖 1：

- 繪畫 $\triangle ABC$ 。
- 構作線段 BC 的中點。
- 將這中點稱為 D 。
- 由 A 點至 D 點畫一線段。
- 用同一方法構作第二條中線連接至 AC 。將線段 AC 的中點稱為 E 。
- 將這兩條中線的相交點稱為 G 。
- 用同一方法構作第三條中線連接 AB 將線段 AB 的中點稱為 F 。



探究 1：

- 當你構作第三條中線後，你可有觀察到一些特別的地方？

- 移動三角形的頂點，你觀察到什麼？

- 寫下一個關於三角形內中線的猜想。

繪圖 2 :

- (a) 量度線段 AG 的長度。
- (b) 量度線段 AD 的長度。
- (c) 量度線段 GD 的長度。
- (d) 用同一方法量度其他中線及其有關部份線段的長度。

探究 2 :

1. 計算 $\frac{AG}{AD}$, $\frac{BG}{BE}$ 和 $\frac{CG}{CF}$ 的值, 有什麼發現? 當你改變三角形的形狀時, 這些比有沒有改變?

2. 計算 $\frac{AG}{GD}$, $\frac{BG}{GE}$ 和 $\frac{CG}{GF}$ 的值。對於形心 G 劃分三角形的中線的情形作一猜想。

教師注意事項：

1. 工作紙的建議答案：

探究 1

1. 是。
2. 不是。
3. 三角形的中線相交於一點。

探究 2

1. $\frac{2}{3}$ 。
2. 三個比都是 2 (或 $\frac{2}{1}$)。換句話說，形心以 2:1 劃分中線。

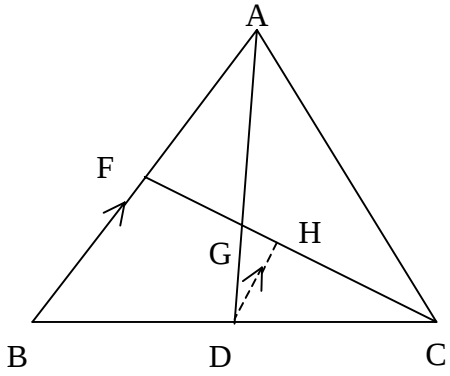
2. 幾何證明的建議答案：

(1) 證明三角形的形心以 2:1 劃分中線。

教師須注意學生必須已認識截線定理及中點定理才可使用方法 3 及 4。

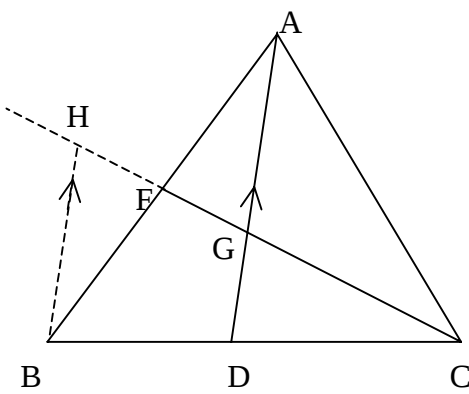
方法 1

預備知識：相似三角形的條件及其性質

	主要步驟： 1. 構作中線 AD 及 CF。 2. 構作 $DH \parallel BA$。 3. 證明 $CDH \sim CBF$。 4. 考慮 CDH 和 CBF，找出比 $BC : DC$ 和 $BF : HD$。 5. 證明 $DHG \sim AFG$ 及求 $AG : GD$。
---	--

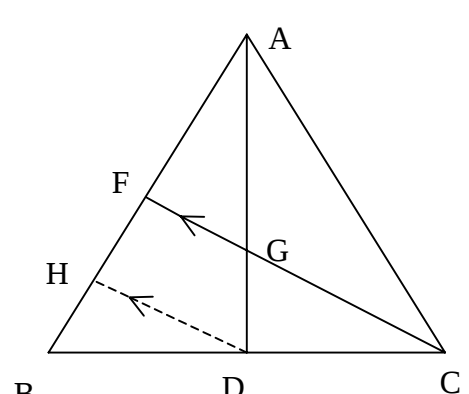
方法 2

預備知識：相似及全等三角形的條件和相似三角形的性質

	主要步驟： 1. 構作中線 AD 和 CF。 2. 延長 CF。 3. 構作 $BH \parallel AD$。 4. 證明 $BHF \cong AGF$。 5. 證明 $CDG \sim CBH$。 6. 求 $BH:DG$ 和 $AG:GD$ 的值
---	--

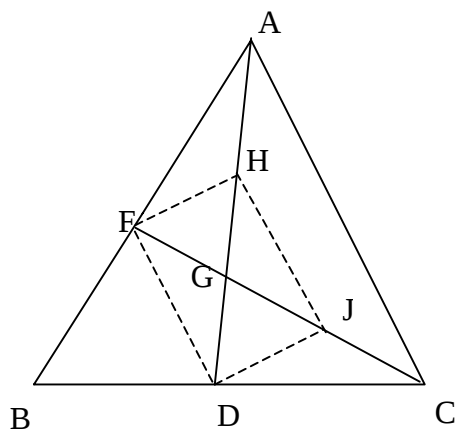
方法 3

預備知識：截線定理

	主要步驟： 1. 構作中線 AD 和 CF。 2. 構作 $DH \parallel CF$。 3. 考慮 BCF 和 BDH，應用截線定理來證明 $BH=HF$。 4. 求 $AF:FH$ 的值。 5. 考慮 AHD 和 AFG，應用截線定理得到 $AG:GD$ 的值。
---	---

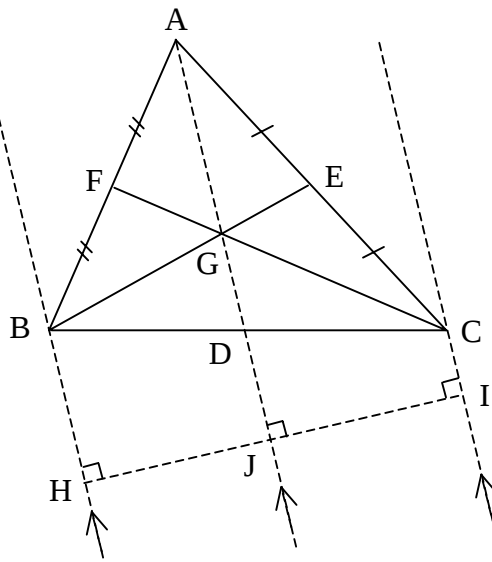
方法 4

預備知識：中點定理和平行四邊形的性質

	主要步驟： 1. 構作中線 AD 及 CF。 2. 構作 AG 的中點 H 和 CG 的中點 J 以組成四邊形 $DFGJ$。 3. 先考慮 BFD, BAC, 再考慮 GJH 和 GCA, 應用中點定理證明 $JH = DF$ 和 $JH \parallel DF$。因此推出 $DFHJ$ 是一個平行四邊形。 4. 利用平行四邊形的性質, 求 $FG : GJ$, $CG : GF$ 和 $AG : GD$ 的值。
---	---

(2) 證明中線是共點

預備知識：三角形面積，形心以 2:1 劃分中線，兩個等高三角形的面積比 = 該兩個三角形的底邊比

	主要步驟： 1. 構作中線 BE 和 CF。 2. 構作通過 BE 和 CF 的相交點的線 AD。 3. 構作線 BH 和 CI 令 $AD \parallel BH \parallel CI$。 4. 構作線 HJ 令 $HJ \perp AD$。 5. 證明 AFG 的面積 = BFG 的面積。 6. 證明 AEG 的面積 = CEG 的面積。 7. 應用 $BG : GE = CG : GF = 2 : 1$, 證明 AFG 的面積 = AEG 的面積。 8. 應用第 7 點的結果證明 $HJ = JI$。 9. 證明 BGD 的面積 = CGD 的面積。 10. 求 $BD : DC$ 的值, 因此證明 AD 是三角形的中線。
---	---

參考資料：

書籍及文章：

1. 中國教育學會主辦。《中小學數學 - 初中版》。1999 年第 7 - 8 期，第八頁。
2. Battista, M. T. (1998). *Shape makers: developing geometric reasoning with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, California: Key Curriculum Press.
3. Dixon, R. A. (1991). *Mathographics*. New York: Dover Publications.
4. Perham, A. E., Perham, B. H. and Perham, F. L. (1997). Creating a Learning Environment for Geometric Reasoning. In *Mathematics Teacher*, 90(7), pp. 521-526. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
5. Wyatt, K. W., Lawrence, A. and Foletta, G. M. (1998). *Geometric activities for middle school students: with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, California: Key Curriculum Press.
6. Yerushalmy, Michal and Houde, Richard (1987). *Geometry problems and projects: triangles*. Pleasantville, New York: Sunburst Communications.

網址：

1. <http://www.geom.umn.edu/~demo5337/Group2/trianglecenters.html>
2. <http://cedar.evansville.edu/~ck6/tcenters/index.html>
3. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/Geometry/eulerline.html>