



示例 21：

畢氏定理在中國古代的證明方法

- 目 標：
- (1) 認識畢氏定理在中國古代的發展
 - (2) 欣賞中國在數學知識發展上的貢獻

學習階段：3

學習單位：畢氏定理

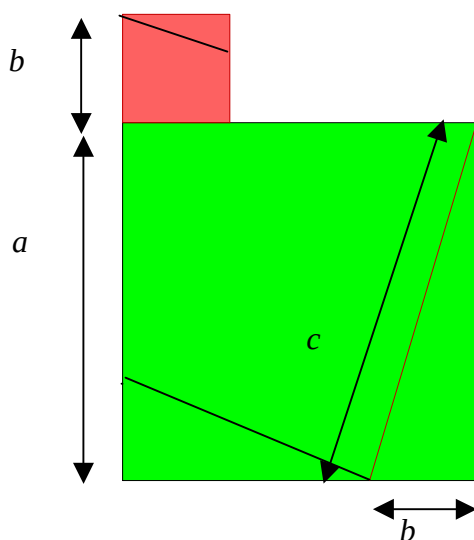
- 所需教材：
- (1) 由相關書籍發展而成的工作紙
 - (2) 有關劉徽證明的活動材料

預備知識：對畢氏定理有基礎認識

活動內容：

1. 教師要求學生說出畢氏定理的內容。
2. 教師派發工作紙 1，並要求學生：
 - (a) 從中盡量找出畢氏定理的不同名稱；
 - (b) 找出有關畢氏定理證明的數目。
3. 教師總結所找到的名稱：勾股定理及商高定理。教師亦可提醒學生商高定理的名稱較多出現在台灣出版的部分書籍內。教師可略為解釋有關勾股定理名稱的起源，並邀請學生就畢氏定理應否改稱為勾股定理的名字作辯論。第 3 題內(a)至(c)部可作為學生家課。

4. 教師分發附件及工作紙 2 給學生，教師略為解釋趙爽證明該定理的方法(參閱附件或教師注意事項內其他相關證明方法)。教師引導學生觀察以上證明的精妙之處，然後著學生完成有關證明。最後，教師總結證明的步驟
5. 教師介紹我國古代另一數學家劉徽及其背景故事¹。學生獲派發如下鋪排的物料，教師要求學生以最少步驟移動這 5 塊塊件來組成一個以邊長為 c 的大正方形。



6. 教師邀請部分學生展示他們的步驟，並與同學討論最少步驟的方法。教師分發工作紙 3，並介紹劉徽所採用的「出入相補法」及以上的「青朱出入圖」。
7. 教師總結在中國古代數學家所使用的兩種證明方法，並可比較其他國家如前美國總統伽菲爾德的證明方法。從而引導學生欣賞中國在發展數學知識上的貢獻。教師可派發工作紙 4 給對這課題甚感興趣的學生，讓他們探究勾股定理在中國古代的應用情況。

¹ 劉徽以割圓術方法來估計 π 值是十分有名的。他的方法是將圓分割為大邊數的正多邊形，從多邊形周界估計圓周，從而求得 π 的估計值。

工作紙 1：畢氏定理的名稱

閱讀以下段落並回答以下問題。

幾何學裏有一個非常重要的定理—畢達哥拉斯定理 (或簡稱畢氏定理)。畢達哥拉斯是約於公元前 500 年的希臘哲學家、天文學家、數學家和音樂家。雖然這定理稱為畢氏定理，但是仍然有討論指出有比畢達哥拉斯更早的數學家已發現這定理。在我國，這個定理稱為勾股定理，或在台灣省稱為商高定理。勾、股是指直角三角形內較短的兩邊（弦是指三角形內的斜邊），而商高則是約於公元前 1100 年周朝時代的人物。這兩個名字均出現於我國有名的《周髀算經》內。

在中國流傳至今最古老的一部天算典籍《周髀算經》中，第一章便記述周公與商高¹的問答，由於商高的答辭中論述了勾股定理的特例“勾²廣三，股修四，徑隅五”的內容。除此，在《周髀算經》卷內之二記載榮方與陳子問答中，亦有陳子講述：「勾股各自乘，并而開方得之」。用現代數學符號表示，即是 $a^2 + b^2 = c^2$ ，其中 a 、 b 及 c 分別是直三角形的兩邊而 c 是斜邊。可見在當時已知勾股定理。

雖然《周髀算經》的成書年代估計為在公元前一世紀至公元一世紀³，不過書中內容則可能在成書前便已產生，如公元前十世紀⁴。因此歷來便有討論，“勾股定理”在中國何時已有嚴格的證明及應否將畢氏定理正名為勾股定理。

勾股定理不僅是最古老的數學定理之一，也是數學中證法最多的一個定理，幾千年來，人們已經發現了 400 多種不同的證明方法，足以編成厚厚的一本書。

1 “從「中國方志從書 商南縣志」卷八“人物志”中查獲一條有關商高生平的記載：[周]商高，黃帝之昆孫。以地得姓。周初封子男於商。精數學，[周髀]衍其說為算經。「國語」曰司商。” 曲安京(1996)

2 “勾”為“勾”的古字。

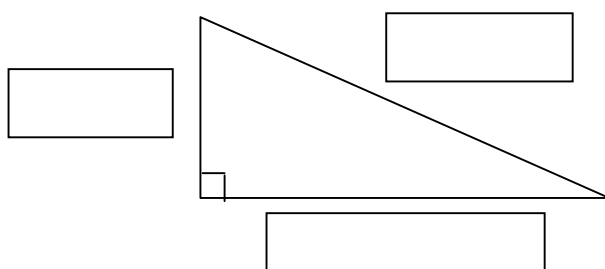
3 李儼(1992)。《中國古代數學簡史》第 32 頁。

4 關於「商南縣志」及上述文字的作者及出處，……，十分可信，商高為西周初期(約公元前十一世紀)的數學家殆無疑問。” 曲安京(1996)

1. (a) 盡量寫出相等於畢氏定理的名稱。

(b) 有多少個已知證明畢氏定理的方法？

2. 在圖中於對應位置寫出三角形內的“勾”、“股”、“弦”的名稱。



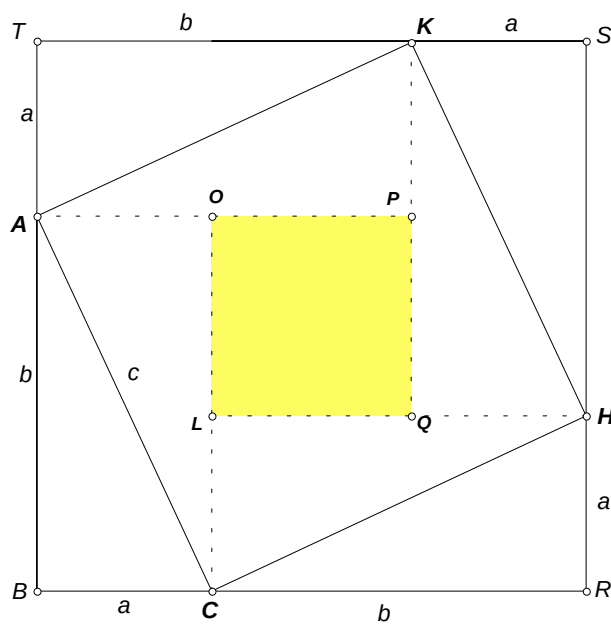
3. (a) 在希臘，畢氏定理大約於那年被“發現”出來呢？

(b) 《周髀算經》大約於那年出現？為何不能準確說出勾股定理的出現年份？

(c) 簡單解釋為何有言論指畢氏定理應稱為勾股定理。

工作紙 2：趙爽的證明方法

參照附件文章所提趙爽(約於公元 300 年)在為《周髀算經》內勾股定理作注釋，所用的證明方法，在以下方空格內將該證明以數學語言重新改寫。



題解：

工作紙 3：劉徽的證明



與趙爽同期，中國的另一數學家劉徽亦發現了一奇妙證明勾股定理的方法。劉徽的方法是完全不用代數方法來作出證明。他的方法以當時文字記錄如下：

句¹自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也。合成弦方之畧，開方除之，即弦也。

劉徽的方法：

劉徽首先作出三角形上兩條直角邊上的正方形，他把由一條直角邊形成的正方形叫做“朱方”，而另一條直角邊形成的正方形叫做“青方”（見圖一），然後把圖中標注有“出”的那部分圖形，移到標注有“入”的那些位置，就拼成了圖中斜置的那個正方形（見圖二）。

劉徽把斜置的那個正方形叫做“弦方”，它正好是由直角三角形斜邊形成的一個正方形。

經過這樣一番移、合、拼、補，自然而然地得出了結論：

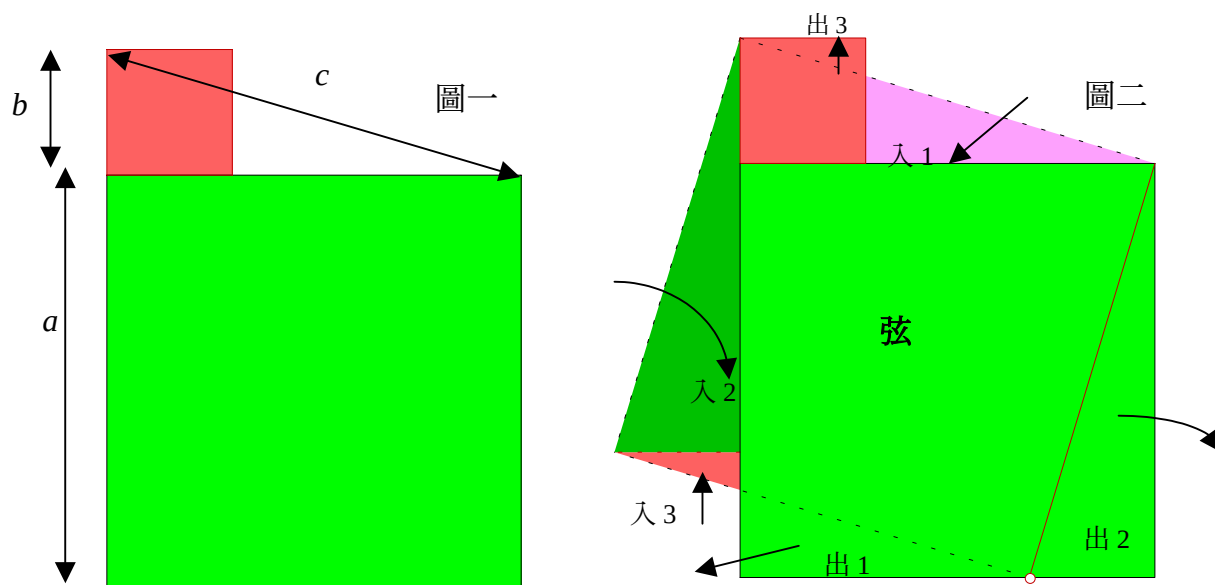
$$\text{朱方} + \text{青方} = \text{弦方}$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 = c^2。$$

“青朱出入圖”是一幅多麼神奇的圖！它甚至不用去標注任何文字，只要相應地塗上朱、青兩種顏色，便能把蘊含於勾股定理中的數學真理，清晰地展示在世人面前。

摘錄自《數學奇觀》第 61 頁

註 1：“句”為“勾”字的古代用字。



工作紙 4：蘆葦問題(或在印度稱為蓮花問題)

1.

在《九章算術》的第九章（勾股章）內的一道出名的蘆葦問題如下：

“葭生中央問題”

今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，適與岸齊，問水深葭長各幾何？

轉為現代中文的意思如下：

有一個正方形的池塘，邊長為 1 丈¹，有棵蘆葦生長在池塘的正中央，高出水面的部分有 1 尺長，如果把蘆葦向岸邊拉，葦頂正好能碰到池岸邊沿。問池塘水深和蘆葦的長度各是多少？

(a) 畫出以上題意並解決以上問題。

題解：

¹ 1 丈等於 10 尺。

(b)

書內提供的題解，以近代語文寫成如下：

把池塘邊長的一半自乘，再把蘆葦出水的那部分自乘，然後相減，將所得的差除以出水數的 2 倍，就是池塘的水深，加上出水數，就是蘆葦的長度。

解釋為何以上方法能找到答案。

2. 以下為另一首印度作家婆什迦羅(公元 1114-1185)有名的蓮花歌謠，你可否以同樣方法解決問題？

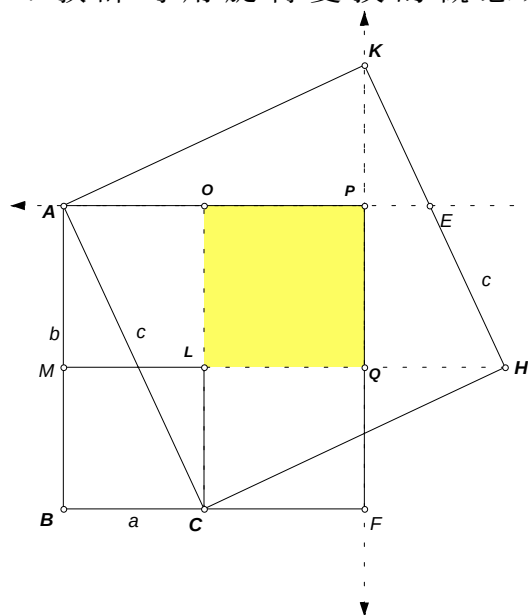
平湖水清可鑒，面上半尺生紅蓬；
出泥不染亭亭立，忽被強風吹一邊；
漁人觀看忙向前，花離原位兩尺遠；
能算諸君請解題，湖水如何知深淺。²

題解：

² 本示例內工作紙大部分詩詞取材自九章出版社的《數學奇觀》及《中國古代數學簡史》，蒙孫文先先生慷慨借出版權，刊於本教學資源套，謹此致謝。

教師注意事項：

1. 本示例提供的閱讀材料只供參考，教師可取用其他可供討論及配合教學目標的閱讀材料。教師宜安排學生在堂上閱讀材料，然後進行討論，而不宜只給予學生作家課活動。除此，教師亦可提供其他課餘閱讀材料給學生或要求學生進行專題習作。
2. 部分學生會覺得較難明白一些以古代語文寫成的閱讀材料。教師可只展示該材料，然後讓學生閱讀以近代語文寫成的文章。如果學生對古文有興趣的話，亦可向中文科教師請教或與中文科合作改為一跨學科的活動。
3. 在進行探討數學歷史的活動時，讓學生領會到數學的動態發展是至為重要的。同時，教師須注意不同書籍在記載歷史詳細背景會略有出入。教師須小心處理這方面的問題及選擇較為可信的閱讀材料。再者，亦須留意這活動主要引述中國在勾股定理的發展，亦可提出其他國家如巴比倫在這方面的貢獻。
4. 教師可用旋轉變換的概念來證明趙爽所提供的「弦圖」：



步驟：

1. 由給出的 $\triangle ABC$ ，分別以邊長 c , a 及 b 作正方形 $ACHK$, $BCLM$ 和 $BFPA$ 。
2. 將 $\triangle ABC$ 繞 C 點以順時針方向旋轉 90° ，與 $\triangle HLC$ 重合。
3. 將 $\triangle ABC$ 繞 A 點以逆時針方向旋轉 90° ，與 $\triangle APK$ 重合。
4. KPQ 為直線。延長線段 CL 會與 AP 相交而形成長方形 $OLQP$ 。
5. 由於 $OP = b - a = OL$ ，因此 $OLQP$ 實為邊長 $b - a$ 的正方形。
6. 由於 $\triangle LCH \cong \triangle QHK \cong \triangle PKA \cong \triangle OCA$
所以 $S_{ACHK} = 4S_{LCH} + S_{OLQP}$
7. 化簡，可得 $c^2 = a^2 + b^2$

5. 有關劉徽證明的動畫效果可在下列網頁找到：
<http://www.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/calckware/3.15.html>。
6. 工作紙 4 的設計是增進學生對中國古代應用勾股定理的問題。有關問題的答案可在《數學奇觀》一書內的第 6.6 段找到。除此，勾股定理在中國的另一重要應用為求太陽與地球間的距離。這活動的資料或工作紙可在網頁 <http://www.cmi.hk/Teaching/Pytha> 中找到或在《中國古代數學簡史》一書內找到。

參考資料：

書籍：

1. 李儼(1992)。《中國古代數學簡史》。中國台灣：九章出版社。
2. 李天華、許濟華編著(1995)。《數學奇觀》。中國台灣：九章出版社。
3. 錢寶琮主編(1981)。《中國數學史》。中國北京：科學出版社。
4. Dan Bennett (1995). *Pythagoras Plugged in Proofs and Problems for the Geometer's Sketchpad*. USA.C.A: Key Curriculum Press.
5. Roger B. Nelsen. (1993). *Proofs Without Words- Exercises in Visual Thinking*. Washington, USA.DC: The Mathematical Association of America
6. Swetz, F.J. & Kao, T.I. (1977). *Was Pythagoras Chinese?*. USA: The Pennsylvania State of University Press.

文章或論文：

1. 李學數(1978)。“希臘郵票上的數學定理和中國的「商高定理」”《數學和數學家的故事(1)》。頁 1-9。香港：廣角鏡出版社。
2. 曲安京(1996)。“商高、趙爽與劉徽關於勾股定理的證明”《數學傳播》20 卷 3 期。台北：中央研究院數學研究所。
3. Darko Veljan (2000). The 2500-Year Old Pythagorean Theorem. In *Mathematics Magazine* Vol. 73, No.4, October 2000. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
4. Lit, C.K. (1998). *Using history of mathematics in junior secondary school classroom: A curriculum perspective*. Unpublished thesis. H.K.: The Chinese University of Hong Kong.

網頁：

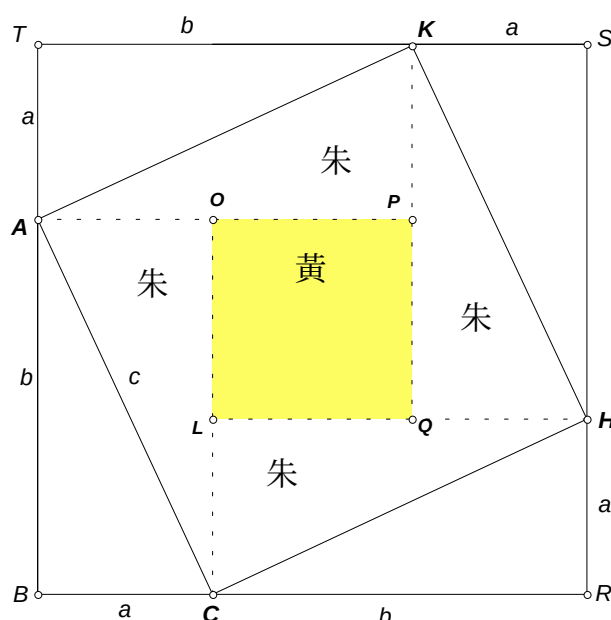
1. <http://www.edp.ust.hk/math/history>
2. <http://www.cmi.hk/Teaching/>
3. <http://alepho.clarku.edu/~djoyce/mathhist>
4. <http://java.sun.com/applets/archive/beta/Pythagoras/>
5. <http://www.ies.co.jp/math/java/samples/pytha2.html> (提供證明的動畫效果)
6. <http://www.vjc.moe.edu.sg/dept/physics/applet/pytha/pythagoras.htm> (提供證明的動畫效果)
7. <http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/java/html/pythagoras.html> (提供歐幾理得的證明動畫)

附件

勾股定理在我國傳統數學(尤其是幾何學)中是一項非常重要的發現及有廣泛應用。其中有明確記載勾股定理的證明，要算是三國時期的數學家趙爽注釋《周髀算經》並撰著“句¹股圓方圖注”。趙爽，字君卿，大約是魏晉(公元三至四世紀)時期的人。他在數學方面的工作，主要保存在《周髀算經注》之內，其中最寶貴的是《句股圓方圖注》。《句股圓方圖注》列於現傳本《周髀算經》卷內。它全文不過五百餘字，卻列出有關於直角三角形三邊之間關係的命題共 21 條。其一為勾股定理及有關勾股定理的證明圖——「弦圖」。

趙爽的證法很有特色，首先，他作 4 個同樣大小的直角三角形，將它們拼成右圖的形狀，然後再著手計劃整個圖形的面積。

顯然，整個 $ACHK$ 圖形是一個正方形，它的邊長是 c ，面積為 c^2 。另一方面，整個 $ACHK$ 圖形又可以看作是 4 個標有「朱」的三角形與 1 個標有「黃」的小正方形面積的和。



4 個三角形的總面積是 $2ab$ ，中間那個小正方形的面積是 $(b-a)^2$ ，它們的和是 $2ab+(b-a)^2=a^2+b^2$ 。比較這兩種方法算出的結果，就有 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

趙爽的證法鮮明地體現了我國古代證題術的特色，這就是先對圖形進行移、合、拼、補，然後再通過代數運算得出幾何問題的證明，這種方法融合幾何、代數於一體，不僅嚴謹，而且直觀，顯示出與古代西方數學完全不同的風格。

部分材料取材自《數學奇觀》第 60 頁

¹ “句”為 “勾”字的古代用字。