



示例 28：

三角恆等式

目 標：探究三角比的關係

學習階段：3

學習單位：三角比和三角的應用

所需教材：Microsoft Excel 及檔案 Trigo_Iden.xls

預備知識：銳角的三角比的定義

活動內容：

活動 I：三角關係： $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ 及

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

1. 教師在課堂開始時與學生簡介銳角的正弦、餘弦及正切的定義。
2. 教師將學生分為兩人一組。教師派發工作紙 1 及 Excel 檔案 Trigo_Iden.xls 予每一學生。每組須利用 Excel 檔案內的工作紙 "Id_1" 以找尋 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的關係（看下圖）。

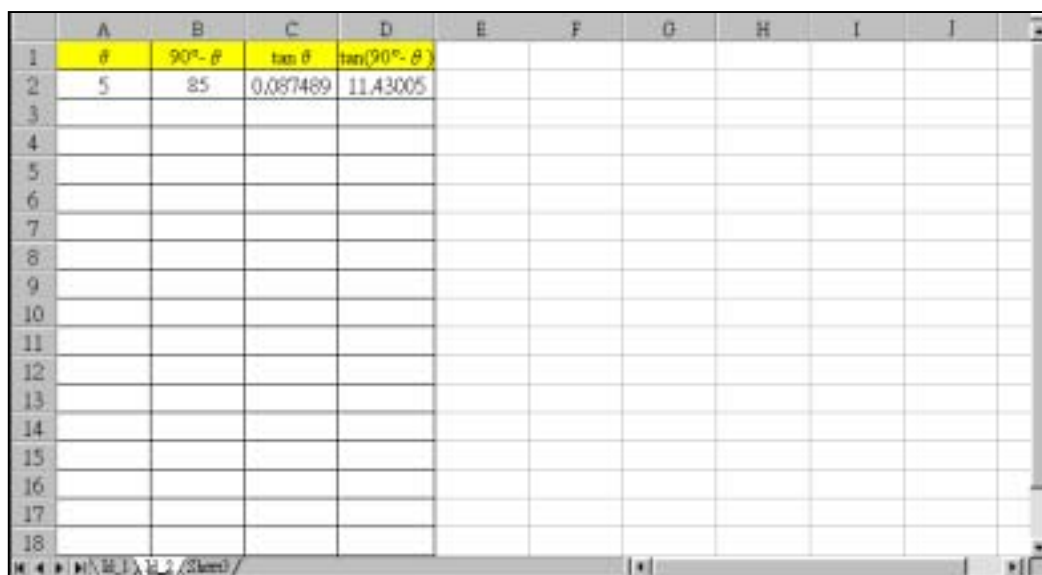
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$						
2	5	0.087156	0.996195	0.087489						
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										

學生須要在工作紙 1 中的步驟 5 填寫 θ 的其他數值。學生可利用電腦產生三角比的對應數值。由此，期望學生發現三角關係 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ， $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ， $\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta$ 及 $\cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta$ 。

3. 如果學生不能發現上述關係，教師可建議學生分別在欄 E 至 J 中考慮 $\sin \theta + \cos \theta$ 、 $\sin \theta - \cos \theta$ 、 $\sin \theta \times \cos \theta$ 、 $\sin \theta \div \cos \theta$ 、 $\sin^2 \theta$ 及 $\cos^2 \theta$ 。
4. 學生亦會發現這關係對於其他 θ 值如 1° ， 37° ， 32.5° ， 68.7° 等均成立。
5. 教師要求學生與其組員討論這些關係的證明。教師派發工作紙 2 予學生。期望學生寫下他們的證明。
6. 教師將結果總結。如有需要，可將證明給予學生。

活動 II： $\tan(90^\circ - \theta)$ 與 $\tan\theta$ 的關係（家課）

1. 由於學生已學習到 $90^\circ - \theta$ 及 θ 之間有一些關係，學生會很自然地考慮 $\tan(90^\circ - \theta)$ 及 $\tan\theta$ 以探究這兩個量的關係。
2. 教師分派 Excel 檔案 Trigo_Iden.xls 予學生（看下圖）。學生須要探究 $\tan(90^\circ - \theta)$ 及 $\tan\theta$ 的關係作為家課。他們須要證明所作出的猜想。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	θ	$90^\circ - \theta$	$\tan \theta$	$\tan(90^\circ - \theta)$						
2	5	85	0.087489	11.43005						
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										

3. 當學生完成並繳交功課後，教師可將答案給予學生。

工作紙 1： $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的關係

1. 開啟 Excel 檔案 Trigo_Iden.xls 並選取工作紙 "Id_1"。
2. 在儲存格 A3 至 A18 中分別鍵入 10 至 85。
3. 藉著將 B2 的公式複製往儲存格 B3 至 B18 等，計算 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的相應數值。
4. 你能找到三角比之間的關係？

將你的發現寫在下面。

如果找不到，可嘗試從欄 E 至 J 中計算 $\sin\theta + \cos\theta$ 、 $\sin\theta - \cos\theta$ 、 $\sin\theta \times \cos\theta$ 、 $\sin\theta \div \cos\theta$ 、 $\sin^2\theta$ 及 $\cos^2\theta$ 的對應數值。

5. 輸入不同的 θ 數值如 1° 、 37° 、 32.5° 、 68.7° 等。重複第 3 點的計算。你在第 4 點所作的猜想仍然成立嗎？

6. 利用 *Excel* 檔案完成下表。

$\sin 5^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 10^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 15^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 20^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 25^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 30^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 35^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 40^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 45^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 50^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 55^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 60^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 65^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 70^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 75^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 80^\circ$	=	$\cos (\quad)$
$\sin 85^\circ$	=	$\cos (\quad)$

7. $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之間有何關係？

[提示： $\sin\theta = \cos(\quad)$ 及 $\cos\theta = \sin(\quad)$]

將你的猜想寫下。

8. 你在第 7 點的猜想對於其他 θ 數值是否仍然成立？

工作紙 2：三角關係的證明

1. 證明 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 。

(a) 以 a 、 b 及 c 表示三角比。

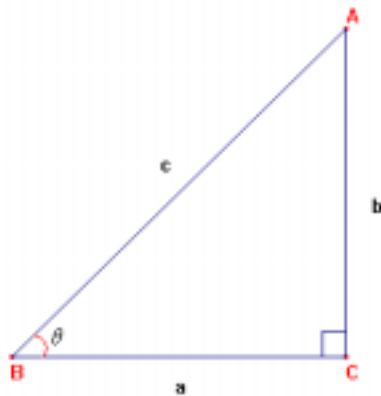


圖 1

(i) $\sin \theta =$ _____

(ii) $\cos \theta =$ _____

(iii) $\tan \theta =$ _____

..... (*)

(b) (i) 利用 (a)(i) 及 (a)(ii) 的結果，以 a 、 b 及 c 表示 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 。

(ii) 比較你在 b(i) 及(a)(iii) 所得的結果，你有何發現？
將你的結論寫下。

2. 利用圖 2 去證明 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 。

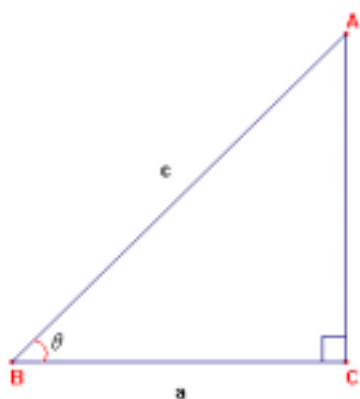


圖 2

證明：

3. 利用圖 3 去證明 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ 及 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ 。

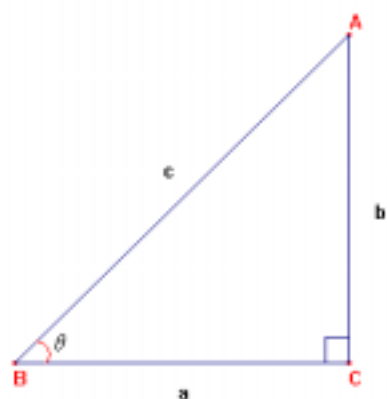


圖 3

證明：

教師注意事項：

1. 本示例的目的是發展三角比關係 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$,
 $\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta$, $\cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta$ 及 $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ 。
2. 教師應提醒學生為了方便起見，在 *Excel* 檔案內的單位是省略的。由此，我們會輸入 10 而非 10° 等。除此之外，在 *Excel* 中，有關已建函數的計算是以弧度法作量度。當使用已建函數時，須作出一些轉換以將輸入角的度數轉換為弧度法。所以我們會在 *Excel* 檔案 *Trigo_Iden.xls* 中的工作紙 "Id_1" 的儲存格 B2 中輸入公式 " $=\sin(A2*PI()/180)$ "。
3. 有關特別角度 0° 及 90° 的正弦、餘弦及正切在此並無提及。教師可向學生解釋有關這些特別角的三角關係仍然成立。
4. 對於能力稍遜學生。在進行第 II 部分家課的探究部分時，教師可建議學生加入 $\frac{1}{\tan \theta}$ 的欄作為提示。如果須要給予學生工作紙，可參閱由教育署數學組於 2001 年製作的「中一至中五數學科教學資源套 1：運用資訊科技」示例 9 的第 II 部分。