

示例 7： 建立代數公式

目標：建立代數公式以解答問題

學習階段：3

學習單位：以代數語言建立問題

所需教材：間尺

預備知識：(1) 利用英文字母代表數字
(2) 解簡單一元一次方程

活動內容：

1. 教師將一個等邊三角形放在黑版上（圖 1），並解釋如果這個等邊三角形每一條邊長 1 單位，周界便會是 3 單位。

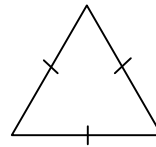


圖 1

2. 教師將另一個同樣大小的等邊三角形放在第一個三角形的側邊，而兩個三角形只有一邊有接觸。（圖 2）

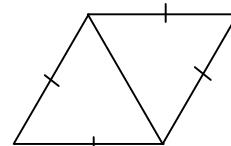


圖 2

3. 教師分發工作紙 1 給學生，並要求他們獨自完成問題 1 及 2。
4. 對於問題 3 至 6，教師幫助學生分組，並鼓勵他們在做這些問題時和組員討論。教師可利用以下的問題從而引導學生解答工作紙的題目：
 - (a) 你可以從觀察中得到答案嗎？
 - (b) 你會用甚麼策略去解答這些問題呢？
 - (c) 有沒有其他方法去解答這些問題呢？
 - (d) 哪一個是最好方法去解答這些問題呢？

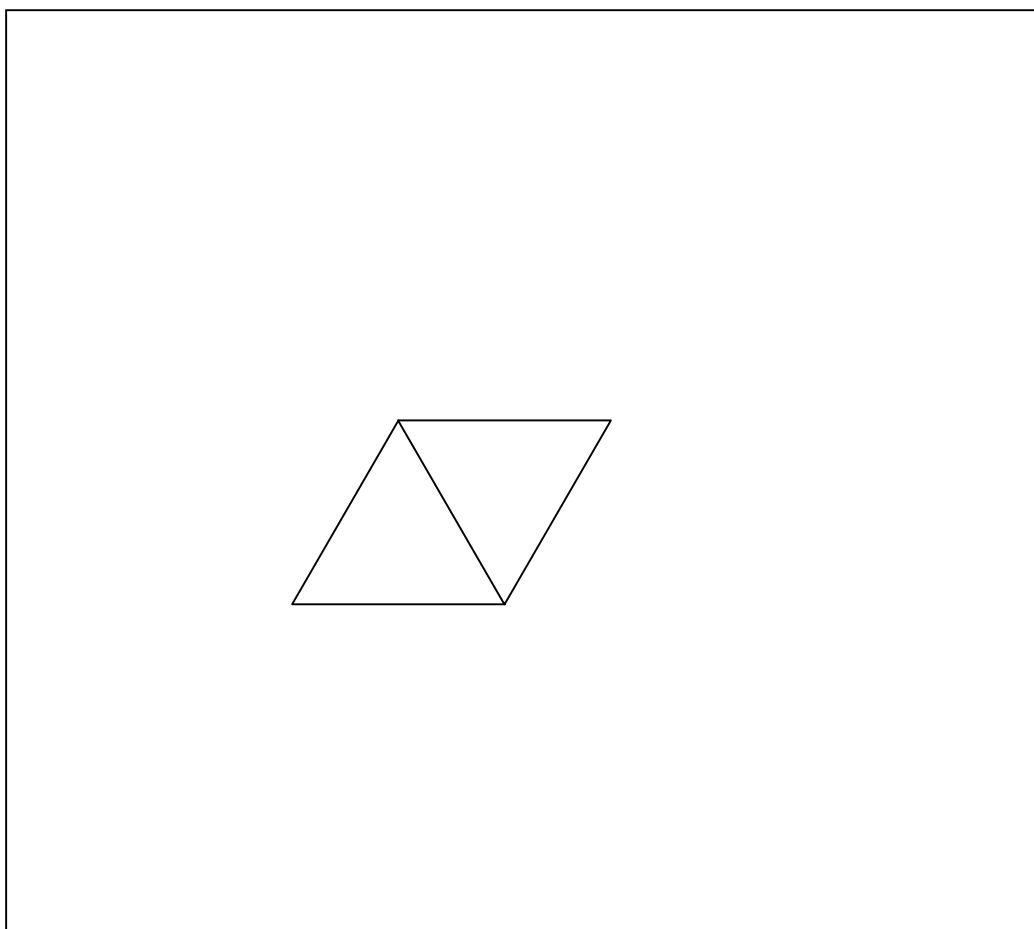
5. 學生如果在推算公式時有困難，教師可以建議他們設立一個表去紀錄三角形的數目和圖形的周界以探究它們的關係。
6. 學生在找到公式後，可以用不同數值的 n 去驗證它。
7. 學生在完成工作紙 1 後，可以獨自做工作紙 2 以鞏固在工作紙 1 所學到的方法之概念。
8. 教師可要求學生在完成工作紙後，解答及解釋以下的問題：
如果新的三角形（或工作紙 2 中的六邊形）與圖形中的兩邊連接，請問三角形（或六邊形）之數目和圖形的周界之關係會是怎樣的呢？

工作紙 1：建立代數公式

問題：

在此工作紙中，所有三角形都是等邊和完全一樣的，而每個三角形的邊長是 1 單位。在此學習活動中，你將會把三角形加至下面的圖形中，而每一個加上去的三角形只能連接這個圖形的其中一邊。

1. 將第三個三角形放在下面兩個三角形其中一個的側邊，並在下圖中畫出來：



2. 所得圖形的周界是多少？

3. 在不用畫圖的情況下，你能夠猜想到加上第四個三角形後，圖形的周界嗎？請問圖形的周界是多少？

4. 利用同樣的推理方法，當加上第五個三角形後，這個圖形的周界是多少？

5. 寫下下列圖形的周界：
- (i) 加上第六個三角形後；
 - (ii) 加上第七個三角形後；和
 - (iii) 加上第八個三角形後。

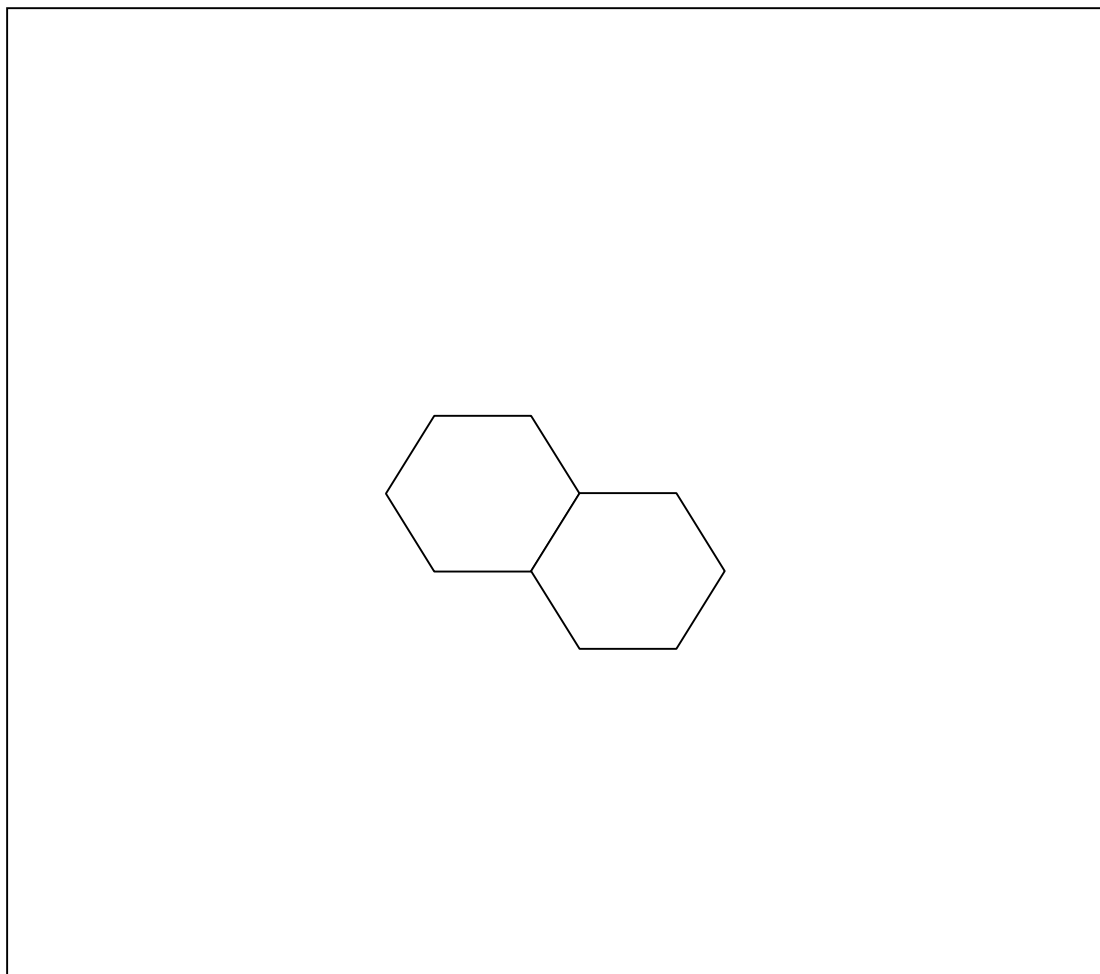
6. 設 n 為三角形的數目和 p 單位為這個圖形的周界。你可以找出一條描述 n 和 p 的關係的公式嗎？

7. 當加至 100 個三角形後，這個圖形的周界是多少？

工作紙 2：建立代數公式

問題：

在此工作紙中，所有六邊形都是正六邊形和完全一樣的，而每個正六邊形的邊長是 1 單位。開始時，兩個同樣大小的正六邊形連接在一起。你須要將正六邊形加至下圖中。每一個加上去的正六邊形只能連接這個圖形的其中一邊。



1. 上面圖形的周界是多少？

2. 試繪畫第三個正六邊形。這個正六邊形只與上圖的其中一邊連接。這個新圖形的周界是多少？

3. 同樣地，當加上第五個正六邊形後，寫下這個圖形的周界。

4. 寫下下列圖形的周界：

- (i) 加上第六個六邊形後；
- (ii) 加上第七個六邊形後；和
- (iii) 加上第八個六邊形後。

5. 設 n 為六邊形的數目和 p 單位為這個圖形的周界。你可以找出一條描述 n 和 p 的關係的公式嗎？

6. 若圖形以 n 個正八邊形組成，你可以用類似上方法猜想一條代表這個圖形周界的公式嗎？

教師注意事項：

1. 在此示例中，教師期望學生能應用數學理念和技巧於不熟悉的問題上，計算及解釋答案，及在一個有啟發性的學習過程中探討問題，從而發展他們的解題技巧。在解答工作紙的問題時，使用的策略（其中一些）包括：
 - 觀察
 - 數數
 - 反覆試驗
 - 表列可行的答案
 - 建立方程式

2. 工作紙 1 問題 2 的答案是 4。
 在這條問題中，學生可以數邊的數目或觀察增加的規律。教師可要求學生比較這兩種方法。他們會發覺這兩個方法均能輕易找出答案。

3. 在工作紙 1 問題 3、4 和 5 中，學生可以用數數方法或表列法。當比較這兩種方法時，他們可能會發覺後者較佳。以下便是這個表：

三角形的數目 n	周界 p
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10

4. 因為題中有一個未知數 n ，工作紙 1 問題 6 是一條較有挑戰性的題目。學生需要對未知數的數值作出一些猜測，而重點是學生能朝著正確方向作出猜測。教師可鼓勵學生建立一個與上一點類似的表格去探究 n 和 p 之間的關係。如果學生在找出公式有困難，可用多一些實際的 n 的數值。如有需要，表格可包括一欄表達數字的規律。以下是一例子：

三角形的數目 (n)	周界的長度 (p)	規律
1	3	$3 = 1 + 2$
2	4	$4 = 2 + 2$
3	5	$5 = 3 + 2$
4	6	$6 = 4 + 2$
5	7	$7 = 5 + 2$
6	8	$8 = 6 + 2$
7	9	$9 = 7 + 2$
8	10	$10 = 8 + 2$
n	$n + 2$	$p = n + 2$

5. 工作紙 1 問題 7 的答案：
當圖形有 100 個三角形時，周界是 102 單位。
6. 工作紙 2 的答案：
Q1. 10
Q2. 14
Q3. 22
Q4. (i) 26
(ii) 30
(iii) 34

7. 學生可用一個類似第 4 點的表格去找出公式。

六邊形的數目 (n)	周界 (p)	規律
1	6	$6 = 4 \times 1 + 2$
2	10	$10 = 4 \times 2 + 2$
3	14	$14 = 4 \times 3 + 2$
4	18	$18 = 4 \times 4 + 2$
5	22	$22 = 4 \times 5 + 2$
6	26	$26 = 4 \times 6 + 2$
7	30	$30 = 4 \times 7 + 2$
8	34	$34 = 4 \times 8 + 2$
n	$4n + 2$	$p = 4n + 2$

8. Q6 的答案： $8n+2$

9. 在活動內容的第 8 點中，學生會察覺到數字 n 和 p 沒有任何關係。在原有圖形的一邊上加上另一圖形，周界會增加固定的單位。如果在原有圖形的兩邊上加上另一圖形，增加固定單位的規律就會不適用。