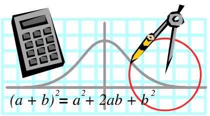


示例 10：
數字規律－斐波那契數列（一）

目　　標： (1) 探究斐波那契數列的規律
(2) 運用代數符號表示該數列的規律

學習階段： 3

學習單位： 以代數語言建立問題

所需教材： 工作紙

預備知識： (1) 觀察簡單數列規律的能力
(2) 運用代數符號表示數式

活動內容：

1. 教師派發工作紙給學生。

2. 教師向學生描述問題。

3. 教師把學生分為二人一組。如情況許可，學生應在課室外利用梯級幫助回答工作紙中的問題。

4. 各組學生應嘗試思考用不同級數上樓梯的可行方法。其中一位同學負責進行試驗而另一位同學則負責紀錄結果。他們亦可於活動進行中對換位置。

5. 教師邀請學生作口頭描述及解釋他們找到的用不同級數上樓梯的規律。教師在適當時候對答案給予評語。

6. 當教師完成核對工作紙的答案後，教師可邀請一些學生解釋為何條件「$\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(n-1) + \mathrm{T}(n-2)$，其中 $n > 2$ 及 n 為自然數」在活動的一般情況下成立。換句話說，上 n 級樓梯不同方法的數目為上 $(n-1)$ 級樓梯不同方法的數目及上 $(n-2)$ 級樓梯不同方法的數目之和。

7. 下列問題可作為討論：
   (a) 當你踏上第 n 級樓梯前，如果
       (i) 你踏兩級樓梯到達第 n 級；
       (ii) 你踏一級樓梯到達第 n 級；
       那一級樓梯是你剛才到達的？
   (b) 你最後一步是一次過上兩級樓梯。當你要踏上第 n 級樓梯時，共有多少種不同方法？
   (c) 你最後一步是一次過上一級樓梯。當你要踏上第 n 級樓梯時，共有多少種不同方法？
   (d) 你每次向上只踏一級或兩級。當你要踏上第 n 級樓梯時，共有多少種不同方法？
       （教師可用第 3 級作為例子去解釋上述的問題）

8. 教師介紹「斐波那契數列」這名稱及總結透過計算此數列的各項可以幫助解決本示例的問題。斐波那契數列是一遞推數列，而其中首兩項均為 1 並每一項等於前兩連續項之和。數列 1，1，2，3，5，8，…可以由以下條件描述：$T(1) = T(2) = 1$ 及 $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$，其中 $n > 2$ 及 n 為自然數。

9. 教師指出本示例所得的數字規律恰好組成一個斐波那契數列。

工作紙

問題：

每天早上當我前往課室時，我都會使用樓梯。我雙腳的長度並不足夠使我每步踏 3 級樓梯，所以我每步踏 2 級樓梯或 1 級樓梯。請問當我上 n 級樓梯時可用多少種不同方法呢？

1. 完成下表：

樓梯級數	不同上樓梯方法的總數 T(n)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2. 試以自己的文字寫出你從上表中得到不同上樓梯方法的總數。

___

___

___

3. 根據第 2 題所描述的關係，試推論代表該關 T(n) 的公式。

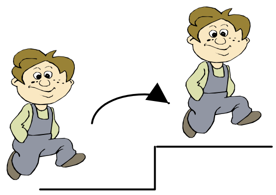
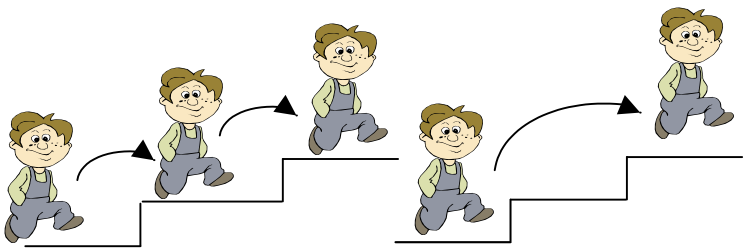
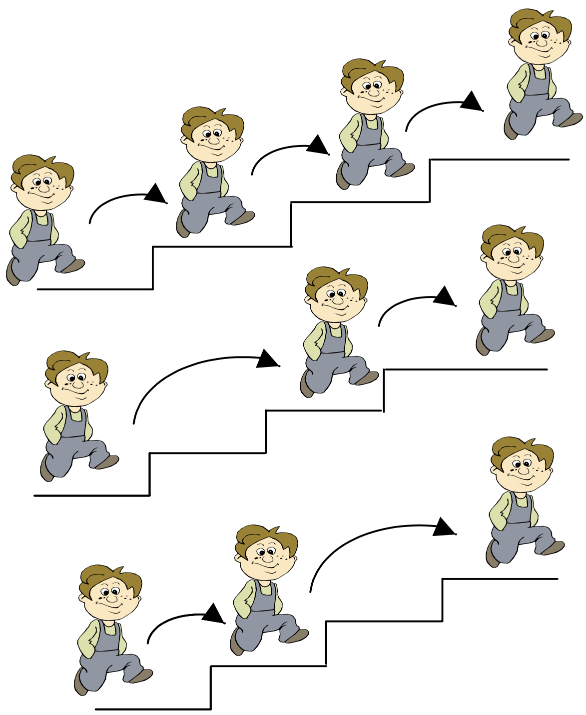
4. 你能否只用問題 3 所得的公式產生問題 1 表格內的數列 T(n) 嗎？如果不能，還要加上什麼條件才能產生整個數列呢？

5. 寫下所有充份的條件來描述上 n 級樓梯方法的規律。

教師注意事項：

1. 教師須要在進行活動前與學生重溫如何利用 T(n) 代表數列的第 n 項。

2. 教師可利用下表向學生解釋如何上一級樓梯、兩級樓梯及三級樓梯的不同方法：

樓梯級數	不同的上樓梯方法	不同方法的總數
1		1
2		2
3		3

3. 工 作 紙 第 1 題 的 答 案 ：

樓 梯 級 數 ， ***n***	不同上樓梯方法的總數，**T (*n*)**
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89

4. 倘 若 學 生 在 推 算 過 程 中 有 困 難 ， 教 師 可 指 導 學 生 在 上 表 中 多 加 一 欄 去 探 討 T(*n*)和 之 前 的 數 項 的 關 係 。

樓 梯 級 數 ， ***n***	不 同 上 樓 梯 方 法 的 總 數 ， **T (*n*)**	**T(*n*)** 與 前 幾 個 項 的 關 係
1	1	1
2	2	2
3	3	3 = 2 + 1
4	5	5 = 3 + 2
5	8	8 = 5 + 3
6	13	13 = 8 + 5
7	21	21 = 13 + 8
8	34	34 = 21 + 13
9	55	55 = 34 + 21
10	89	89 = 55 + 34

5. 第 2 題的答案：

   上 n 級樓梯不同方法的數目等於上 $(n-1)$ 級樓梯不同方法的數目及上 $(n-2)$ 級樓梯不同方法的數目之和。

6. 第 3 題的答案：

   $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$，其中 $n > 2$。

7. 第 4 題的答案：

   $T(1) = 1$

   $T(2) = 2$

8. 第 5 題的答案：

   $T(1) = 1$

   $T(2) = 2$

   $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$，其中 $n > 2$。