

## 示例 11：

### 數字規律—斐波那契數列（二）

- 目 標：** (1) 探究斐波那契數列的規律  
(2) 運用代數符號表示該數列的規律

**學習階段：** 3

**學習單位：** 以代數語言構思問題

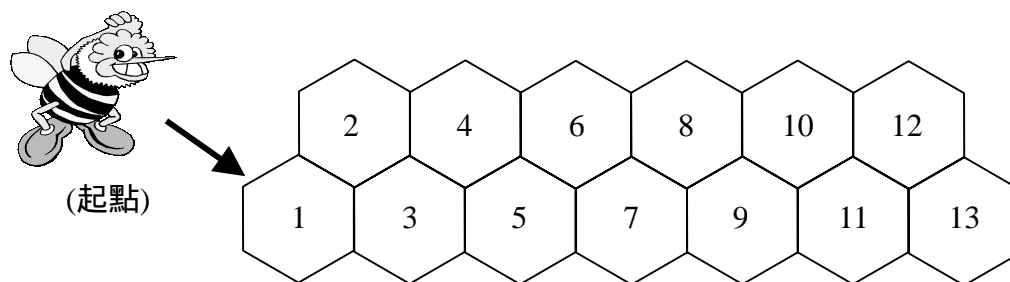
**所需教材：** 高映機、膠片、箱頭筆、工作紙

- 預備知識：** (1) 整數的基本四則運算  
(2) 函數的記號

**活動內容：**

1. 教師派發工作紙給學生。
2. 利用高映片的幫助，教師將問題向學生描述。
3. 教師要求學生完成工作紙。
4. 教師邀請學生口頭作答。
5. 教師對答案給予評語。

工作紙：數字規律



在圖中，蜜蜂從起點（如圖所示）開始，向右邊移動，但它祇能移動至較大數目的蜂窩。試計算蜜蜂從起點移到蜂窩  $n$  的路徑數目，其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

| $n$ | $T(n)$<br>從起點到蜂窩 $n$ 的路徑數目 |
|-----|----------------------------|
| 1   |                            |
| 2   |                            |
| 3   |                            |
| 4   |                            |
| 5   |                            |
| 6   |                            |
| 7   |                            |
| 8   |                            |

1.  $T(1)$ ， $T(2)$  和  $T(3)$  有何關係？參考蜜蜂的移動路徑，解釋這個關係。

---



---



---

2.  $T(2)$ ， $T(3)$  和  $T(4)$  有何關係？參考蜜蜂的移動路徑，解釋這個關係。

---



---



---

3.  $T(n)$  中連續三項有何關係？試用  $T(n - 2)$ ,  $T(n - 1)$  和  $T(n)$  來代表這個數列中的連續三項。參考蜜蜂的移動路徑，解釋這個關係。

---



---



---

4. 你能只用問題 3 的關係來描述路徑數目的規律嗎？如果不能，還要加上什麼條件才能描述整個規律呢？

---



---



---

5. 寫下所有充份的條件來描述從起點到蜂窩  $n$  的路徑數目的規律。

---



---



---

**教師注意事項：**

1. 教師要確定學生能夠利用函數記號  $T(n)$  來代表數列的第  $n$  項。
2. 從起點到蜂窩  $n$  的路徑數目  $T(n)$ ，可由下列條件得出：
  - (a)  $T(1) = 1$ ；
  - (b)  $T(2) = 2$ ；和
  - (c)  $T(n) = T(n - 2) + T(n - 1)$ ，其中  $n$  是一個大於 2 的自然數。
3. 學生可能不容易解釋為什麼條件 (c) 能在一般情況下成立。教師要給予學生一些指引。
  - (a) 教師可引導學生去思考以下問題：
    - (i) 蜜蜂進入蜂窩  $n$  之前，它會先到達哪個蜂窩呢？  
答案：蜂窩  $n - 2$  或蜂窩  $n - 1$ 。
    - (ii) 蜜蜂從蜂窩  $n - 1$  進入蜂窩  $n$  和從蜂窩  $n - 2$  進入蜂窩  $n$ ，各有多少路徑？  
答案：兩種情形都祇得一個途徑。
    - (iii) 蜜蜂從起點到蜂窩  $n$  前途經蜂窩  $n - 2$  和途經蜂窩  $n - 1$ ，各有多少不同的路徑？  
答案：第一部分是  $T(n - 2)$ ，而第二部分是  $T(n - 1)$ 。
  - (b) 教師幫助學生找出蜜蜂從起點移到蜂窩  $n$  的路徑數目是從起點移到蜂窩  $n - 2$  的路徑數目與從起點移到蜂窩  $n - 1$  的路徑數目之和。
4. 教師應指出任何數列符合 (2) 的條件可稱為斐波那契數。
5.  $T(n)$  亦可以定義為

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], n \geq 1.$$