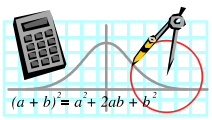

示例 14：
聯立線性方程解的數目

目　　標： 探究聯立線性方程解的數目

學習階段： 3

學習單位： 二元一次方程

所需教材： *Excel* 及檔案 NA14_c.xls

預備知識： (1) 二元一次方程的圖像
(2) 以代數方法及圖解法解聯立線性方程

活動內容：

1. 教師簡略地重溫解聯立線性方程的方法。

2. 教師將學生分組。

3. 教師派發工作紙予學生。

4. 學生以代數方法解工作紙的第 1 題。

5. 當學生完成第 1 題後，開啟 *Excel* 檔案 NA14_c.xls 以完成第 2 至 7 題。檔案內有一個 *Visual Basic* 的應用程式。此程式能讓學生點按內置按鈕去觀看圖像的互動變化。(參閱圖 1)

6. 教師邀請一些組別代表向全班匯報其結果及結論。教師可給予評語及作出總結。

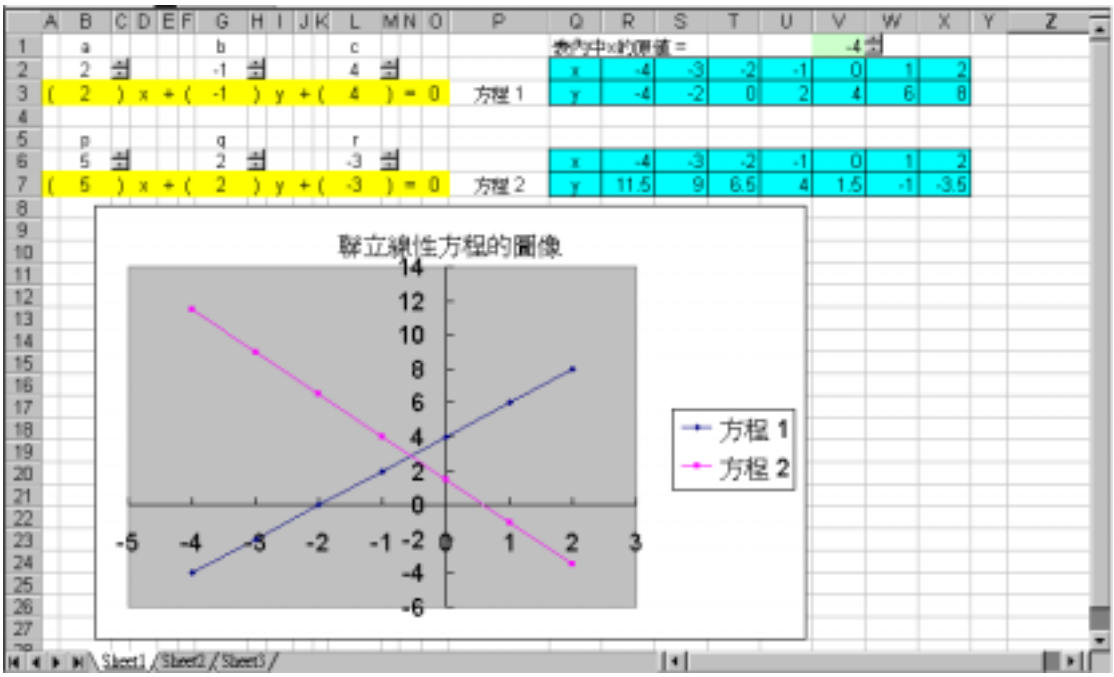
a
b
c
2
-1
4
(2) x + (-1) y + (4) = 0
方程 1
p
q
r
5
2
-3
(5) x + (2) y + (-3) = 0
方程 2
-4
x -4 -3 -2 -1 0 1 2
y -4 -2 0 2 4 6 8
x -4 -3 -2 -1 0 1 2
y 11.5 9 6.5 4 1.5 -1 -3.5
聯立線性方程的圖像
方程 1
方程 2
Sheet1 / Sheet2 / Sheet3 /

圖 1

工作紙： 聯立線性方程解的數目

第 I 部分

1. 以代數方法解以下聯立線性方程。

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$$

2. 開啟 *Excel* 檔案 NA14_c.xls。
此 *Excel* 檔案提供一程式以圖解法解聯立方程

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases},$$

其中 a, b, c, p, q 及 r 為實數。
在儲存格 B2, G2, L2, B6, G6 及 L6 上分別輸入 a, b, c, p, q 及 r 的數值, 再次試解問題 1。
你可以從圖像或從表格中找出題解。

答案：

(a) 圖像共有_____個交點。

(b) 問題共有_____解。

(c) 方程的解是 (　　,　　)。

3. 利用 *Excel* 檔案去找出下列聯立線性方程的解的數目及其圖像的交點數目。

(a)

方程 1 $ax+by+c=0$	方程 2 $px+qy+r=0$	解的數目	交點的數目	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{q}$
$3x-y=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+1=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+2=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+3=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+4=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+5=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+6=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+7=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+8=0$	$2x-3y+7=0$				

表 1

若想改變 c 的數值，你可以直接將數值鍵入儲存格 L2 或在儲存格 M2 上點按 **SpinUp** 按鈕 或 **SpinDown** 按鈕 。在儲存格 W1 上點按 **SpinUp** 按鈕 或 **SpinDown** 按鈕 可以改變表格中的 x 之起始值。

(b) 點按儲存格 M2 的 **SpinButton** 按鈕 改變 c 的值後，方程 1 的圖像有甚麼改變？

_____

_____

(c) 根據表 1 的結果，$\frac{a}{p}$ 和 $\frac{b}{q}$ 之間有沒有任何關係？兩者的關係是什麼？

_____

_____

(d) 選擇 a,b 及 c 的其他數值，並把它鍵入 *Excel* 檔案中。對於 a 和 b 的每一個數值，點按 c 值的 **SpinButton** 按鈕 以改變其值。

觀察 c 的不同數值對於解數目的影響。寫你的結論，並與組員討論所得結論。

_____

_____

_____

_____

第 II 部分

4. 根據聯立線性方程 $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ -4x+2y-3=0 \end{cases}$，輸入 a, b, c, p, q 及 r 的數值於 *Excel* 檔案中。

(a) 兩方程的圖像是否相交？ _____

(b) 有多少解能同時滿足這兩條方程？ _____

(c) 此兩圖像有甚麼關係？ _____

(d) 交點的數目與解的數目有甚麼關係？

_____

_____

你可以透過點按在儲存格 W1 中的 **SpinButton** 按鈕 改變 x 的起始值，並觀察兩圖像是否相交。

5. 在某些情況下圖像是沒有交點的。因此，該聯立線性方程便沒有解。

(a) 表 2 欠缺某些方程，試構想適當的方程使每題的聯立線性方程均沒有解。利用 Excel 檔案內所提供之電腦程式檢查你的答案。將答案填寫於表內。

問題	方程 1 $ax+by+c=0$	方程 2 $px+qy+r=0$	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{q}$	$\frac{c}{r}$
1	$x+2y-3=0$				
2	$3x+y+1=0$				
3	$x-2y=0$				
4		$4x+3y-5=0$			
5		$-2x+y+10=0$			
6		$x+y+3=0$			

表 2

(b) 當聯立線性方程 $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$

沒有解時，根據表 2 的結果，你認為 a，b，c，p，q 及 r 之間有什麼關係？

第 III 部分

6. 已知聯立線性方程 $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ -4x+2y-3=0 \end{cases}$,

在 *Excel* 檔案中輸入 a,b,c,p,q 及 r 的對應數值。選取 –3 為第二方程的 r 數值。

(a) 點按 r 的 **SpinButton** 按鈕 改變 r 的數值使兩圖像重疊。

r 的數值是什麼？ _____

(b) 能否從 *Excel* 檔案的表格中提議一些可能的解？寫出部分的解：

(　　,　　), (　　,　　), (　　,　　), (　　,　　)。

(c) 從上述結果中，你得出甚麼結論？請寫下。

_____

_____

(d) 當 ax+by+c=0 及 px+qy+r=0 兩圖像重疊時，a，b，c，p，q 及 r 有何關係？

_____

_____

第 IV 部分

結論：

7. 總結你從第 I、II 及 III 部分的結果，寫下你的結論。根據方程 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ px+qy+r=0 \end{cases}$，完成下表。

交點數目	解的數目	$\frac{a}{p}$, $\frac{b}{q}$ 及 $\frac{c}{r}$ 的關係
0		
1		
無限		

教師注意事項：

1. 本示例的目的是讓學生探究聯立方程解的數目而非去找出解。圖像的主要作用是用來顯示交點。第 **I** 部分集中討論兩條非平行的線，第 **II** 部分著重兩條平行線，而第 **III** 部分則著重兩線重疊的線。

2. 學生不難從圖像中觀察到交點的數目可以是 0,1 或無限多個。學生可利用「*超過一個解*」來描述無限多個解的情況。教師亦可向學生介紹「無限多個解」,「一個解」及「沒有解」這些名詞的意思。至於「相容」及「不相容」這兩個名詞，則可以向能力較佳的學生作介紹。

3. 在 *Excel* 檔案中，若將儲存格 G2 的 b 的數值設為零，在繪畫圖像上會面對困難。原因是在表中計算 y 的數值時，是取用公式 $y=\frac{-(\mathrm{a}x+\mathrm{c})}{\mathrm{b}}$。當 b 是非零時，$y$ 才有意義。教師可將此特殊情況向學生講解。在此情況下，圖像是一條垂直線。

4. 工作紙的建議答案：

<table>
<tr><th>問 題</th><th colspan="7">答 案</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="7">(1,3)</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="7">(a) 1
(b) 1
(c) (1,3)</td></tr>
<tr><td rowspan="7">3</td><td rowspan="7">(a)</td><td>方程 1
$\mathrm{a}x+\mathrm{b}y+\mathrm{c}=0$</td><td>方程 2
$\mathrm{p}x+\mathrm{q}y+\mathrm{r}=0$</td><td>解的數目</td><td>相交點的數目</td><td>$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}}$</td><td>$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{q}}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y+1=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y+2=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y+3=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y+4=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y+5=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>問 題</th><th colspan="7">答 案</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="3"></td><td>$3x-y+6=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y+7=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$3x-y+8=0$</td><td>$2x-3y+7=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">(b) 圖像往上移或往下移。所有線均與原來的線平行。
(c) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$。
(d) 當原來的方程只有一個解時，改變 c 的值對於解的數目是沒有影響的。</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="7">(a) 否
(b) 0
(c) 互相平行
(d) 數目相同</td></tr>
<tr><td rowspan="8">5</td><td rowspan="7">(a)</td><td>問題</td><td>方程 1
$ax+by+c=0$</td><td>方程 2
$px+qy+r=0$</td><td>$\frac{a}{p}$</td><td>$\frac{b}{q}$</td><td>$\frac{c}{r}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$x+2y-3=0$</td><td>$\boldsymbol{x+2y=0}$</td><td>1</td><td>1</td><td>$-\frac{3}{2}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$3x+y+1=0$</td><td>$\boldsymbol{6x+2y+3=0}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$x-2y=0$</td><td>$\boldsymbol{x-2y+5=0}$</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\boldsymbol{4x+3y+2=0}$</td><td>$4x+3y-5=0$</td><td>1</td><td>1</td><td>$-\frac{2}{5}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\boldsymbol{2x-y+10=0}$</td><td>$-2x+y+10=0$</td><td>-1</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\boldsymbol{-3x-3y+1=0}$</td><td>$x+y+3=0$</td><td>-3</td><td>-3</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>(b)</td><td colspan="6">$\frac{a}{p}=\frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>問 題</th><th colspan="3">答 案</th></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">(a) -8
(b) $(-2,0),(-1,2),(0,4),(1,6)$等。
(c) 當兩線重疊時，將會有無限多個解。
(d) $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7</td><td>交點數目</td><td>解的數目</td><td>$\frac{a}{p}$, $\frac{b}{q}$ 及 $\frac{c}{r}$ 的關係</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}$</td></tr>
<tr><td>無限</td><td>無限</td><td>$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$</td></tr>
</table>

附註： 5(a)表內的答案(粗體字部分)，並非唯一的答案。滿足已知條件還有其他方程。