



示例 4： 規律

目標：學生能夠

- (1) 探究、欣賞和觀察斐波那契數列的規律
- (2) 運用代數符號表示該數列的規律

學習範疇：數與代數

學習單位：以代數語言構思問題

學習階段：第三學習階段

所需教材：高映機、膠片、箱頭筆、工作紙

預備知識：

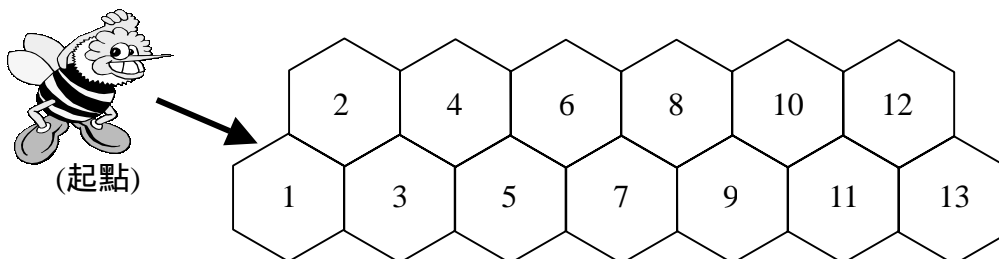
- (1) 整數的基本四則運算
- (2) 函數的記法

有關的高層次思維能力：探究能力、推理能力

活動內容：

活動：計算蜜蜂所走路徑的數目

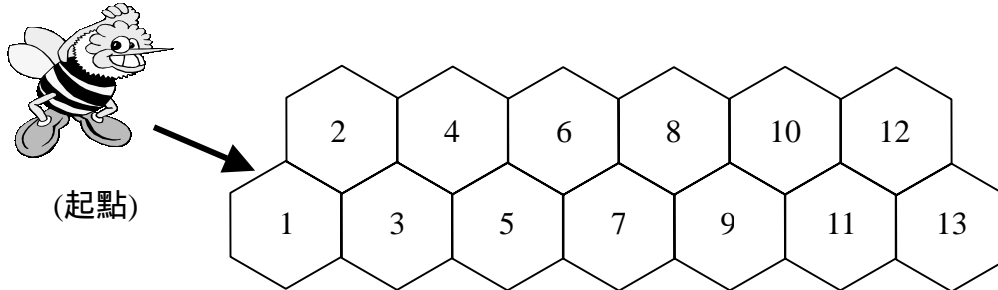
1. 派發工作紙 4.1 給學生。
2. 利用高映片的幫助，教師將問題向學生描述：



在圖中，蜜蜂從蜂巢的蜂窩 1 開始，向右邊移動，但它祇能移動至較大數目的蜂窩。試計算蜜蜂從起點移到蜂窩 n 的路徑數目，其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

3. 要求學生完成工作紙 4.1。
4. 邀請學生口頭作答。
5. 教師對答案給予評語。

工作紙 4.1 :



在圖中，蜜蜂從蜂巢的蜂窩 1 開始，向右邊移動，但它祇能移動至較大數目的蜂窩。試計算蜜蜂從起點移到蜂窩 n 的路徑數目，其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

n	$T(n)$ 從起點到蜂窩 n 的路徑數目
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

1. $T(1)$, $T(2)$ 和 $T(3)$ 有何關係？參考蜜蜂的移動路徑，解釋這個關係。

2. $T(2)$, $T(3)$ 和 $T(4)$ 有何關係？參考蜜蜂的移動路徑，解釋這個關係。

3. $T(n)$ 中連續三項有何關係？試用 $T(n-2)$, $T(n-1)$ 和 $T(n)$ 來代表這個數列中的連續三項。參考蜜蜂的移動路徑，解釋這個關係。

4. 你能只用問題 3 的關係來形容路徑數目的規律嗎？如果不能，還要加上什麼條件才能形容整個規律呢？

5. 寫下所有充份的條件來形容從起點到蜂窩 n 的路徑數目的規律。

教師注意事項：

1. 教師要確定學生能夠利用函數的記法 $T(n)$ 來代表數列的第 n 項。
2. 從起點到蜂窩 n 的路徑數目 $T(n)$ ，可由下列條件得出：
 - (a) $T(1)=1$ ；
 - (b) $T(2)=2$ ；和
 - (c) 當 n 是一個大於 2 的自然數時， $T(n)=T(n-2)+T(n-1)$ 。
3. 學生可能覺得不容易解釋為什麼條件(c)能在一般情況下成立。教師要給予學生一些指引。
 - (a) 教師可引導學生去思考以下問題：
 - (i) 蜜蜂進入蜂窩 n 之前，它會先到達哪個蜂窩呢？
答案：蜂窩 $n-2$ 或蜂窩 $n-1$ 。
 - (ii) 蜜蜂從蜂窩 $n-1$ 進入蜂窩 n 和從蜂窩 $n-2$ 進入蜂窩 n ，各有多少路徑？
答案：兩種情形都祇得一個途徑。
 - (iii) 蜜蜂從起點到蜂窩 n 前途經蜂窩 $n-2$ 和途經蜂窩 $n-1$ ，各有多少不同的路徑？
答案：第一部分是 $T(n-2)$ ，而第二部分是 $T(n-1)$ 。
 - (b) 教師幫助學生總結蜜蜂從起點移到蜂窩 n 的路徑數目是從起點移到蜂窩 $n-2$ 的路徑數目與從起點移到蜂窩 $n-1$ 的路徑數目之和。
4. 教師應指出任何數列符合(2)的條件可稱為斐波那契數。
5. $T(n)$ 亦可以定義為

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], n \geq 1$$