



示例

探討平移、反射和旋轉 對點的坐標之影響

- 目標：**
- (1) 以坐標表示一點經過平移、與 x 軸或 y 軸平行的線作反射及以原點為中心旋轉 90° 或其倍數等的變換後的影像位置
 - (2) 用 (x,y) (x',y') 符號描述變換

學習範疇： 度量、圖形與空間

學習單位： 坐標簡介

學習階段： 第三學習階段

所需教材： *Geometer's Sketchpad*

預備知識： 坐標，平移、反射及旋轉的直觀概念

活動內容：

1. 教師將學生分為兩人一組來進行活動。
2. 教師指示學生
 - (a) 於直角坐標平面上，構作四邊形 ABCD (示例參閱圖 4.1)。
 - (b) 量度各頂點的坐標。
 - (c) 繪畫點 $P(2,6)$, $Q(5,6)$, $R(5,4)$ 和 $S(1,0)$ 。
 - (d) 從點 P, Q, R 和 S 中，任意選取兩點，標記連接此兩點的向量。
 - (e) 根據(d)點中的向量的方向與長度，平移四邊形 ABCD。
 - (f) 以 $A'B'C'D'$ 標示影像，使 $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ 及 $D \rightarrow D'$, 如圖 4.1 所示。
 - (g) 完成工作紙 4.1 的第 I 部分。
3. 邀請部份學生匯報他們的結果，並且可給予評語。

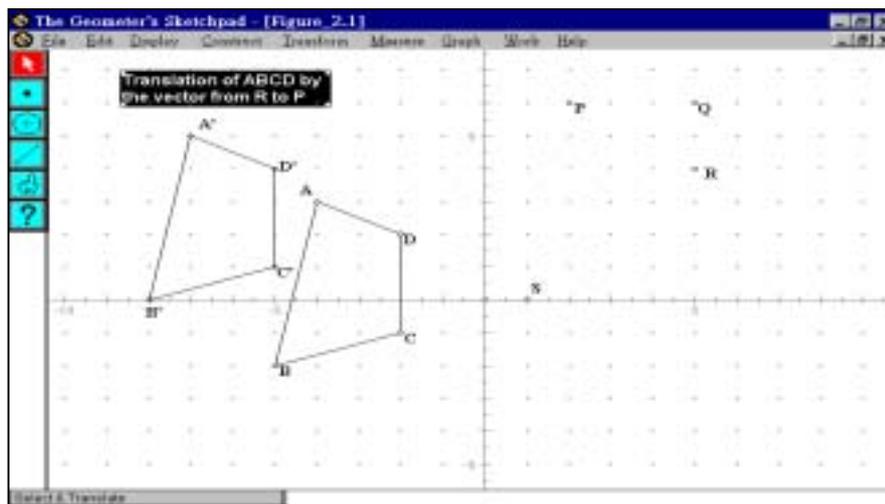


圖 4.1

4. 教師指示學生清除視窗中的繪圖，並依以下步驟繪畫新圖：
 - (a) 於直角坐標平面上，構作四邊形 ABCD(示例參閱圖 4.2)。
 - (b) 量度各頂點的坐標。
 - (c) 沿以下各直線反射四邊形 ABCD
 - (i) x 軸，
 - (ii) 平行於 x 軸的直線，
 - (iii) y 軸，
 - (iv) 平行於 y 軸的直線。
 - (d) 以 $A'B'C'D'$ 標示影像，使 $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ 及 $D \rightarrow D'$ ，圖 4.2 顯示 (c)(ii)的結果。
 - (e) 完成工作紙 4.1 的第 II 部分。
5. 邀請部份學生匯報他們的結果，教師可給予評語。

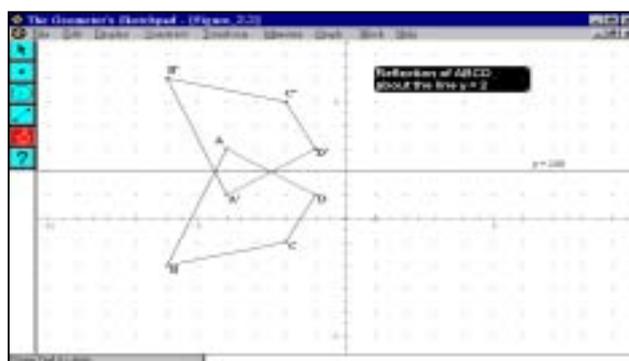


圖 4.2

6. 教師指示學生清除視窗中的繪圖，並依以下步驟繪畫新圖：
- 於直角坐標平面上，作五邊形 ABCDE。
 - 量度各頂點的坐標。
 - 以原點作旋轉中心，根據以工作紙 4.1 第 III 部分的表 4.3 所列出的角度，旋轉五邊形 ABCDE。
 - 以 A'B'C'D'E' 標示影像使 A A', B B', C C', D D' 及 E E'，如圖 4.3 所示。
 - 回答工作紙 4.1 中第 III 部分的第 1 至 3 題問題。

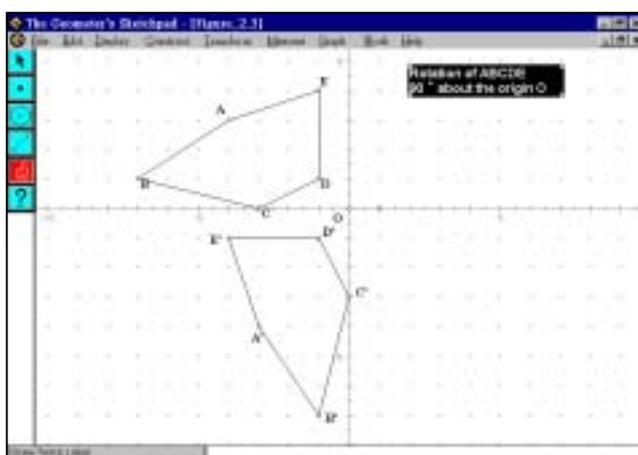


圖 4.3

7. 教師指示學生進行以下的探究及回答工作紙 4.1 中第 III 部份的第 4 題問題。
- 當以原點作為旋轉中心，旋轉角度是 90° 的負倍數時，旋轉的方向有何不同？
 - 以符號表示(a)部分的每一旋轉。
8. 選取五邊形 ABCDE 的任何頂點作為旋轉中心，以符號表示沿此中心作 90° 之倍數的旋轉。

旋轉角度	以符號表示的旋轉
90°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$
180°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$
270°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$
360°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$
-90°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$
-180°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$
-270°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$
-360°	$(x, y) \rightarrow (\quad , \quad)$

Geometer's Sketchpad

工作紙 4.1：直角坐標平面上的點之平移、反射與旋轉

第 I 部分：平移

步驟：

1. 於直角坐標平面上，作四邊形 ABCD。
2. 量度各頂點的坐標。
3. 繪畫點 P(2,6)，Q(5,6)，R(5,4)和 S(1,0)。
4. 從點 P, Q, R 和 S 中，任意選取兩點，標記連接此兩點的向量。
5. 依據第 4 點構作的向量的方向與長度，平移四邊形 ABCD。
6. 以 A'B'C'D' 標示影像，使 A A'，B B'，C C' 及 D D'。

探究活動：

1. 完成表 4.1。

標示向量		A (,)	B (,)	C (,)	D (,)
由	至				
P	Q	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
Q	P	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
R	Q	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
Q	R	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
R	P	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
Q	S	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)

表 4.1

2. 影像頂點的坐標與原來圖形頂點的坐標有沒有關係？如果有的話，請簡略描述。

3. 拖曳四邊形 ABCD 的頂點至網格中其它的位置，關係是否仍然成立？寫下你的猜想。

猜想：

Geometer's Sketchpad

第 II 部分：反射

步驟：

- 於直角坐標平面上，作四邊形 ABCD。
- 量度各頂點的坐標。
- 沿以下各直線反射四邊形 ABCD：
 - x 軸；
 - 平行於 x 軸的直線：(i) $y=-1$ ，(ii) $y=2$ ；
 - y 軸；
 - 平行於 y 軸的直線：(i) $x=-1$ ，(ii) $x=2$ 。
- 以 A'B'C'D' 標示影像，使 A A'，B B'，C C' 及 D D'。

探究活動：

- 完成表 4.2。

反射軸(鏡)	A (,)	B (,)	C (,)	D (,)
(a) x 軸	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
(b) y 軸	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
(c) 平行於 x 軸的直線				
(i) $y = -1$	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
(ii) $y = 2$	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
(d) 平行於 y 軸的直線				
(i) $x = -1$	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)
(ii) $x = 2$	A' (,)	B' (,)	C' (,)	D' (,)

表 4.2

2. 影像頂點的坐標與原來圖形頂點的坐標有沒有關係？如果有的話，請簡略描述。

3. 拖曳四邊形 ABCD 的頂點至網格中其它的位置，關係是否仍然成立？寫下你的猜想。

猜想：

4. 將四邊形 ABCD 先沿 y 軸反射，之後再沿 x 軸反射，影像與原來圖形有何關連？

Geometer's Sketchpad

第 III 部分：旋轉

步驟：

1. 於直角坐標平面上，作五邊形 ABCDE。
2. 量度各頂點的坐標。
3. 以原點作為旋轉中心，依表 4.3 所示的角度，旋轉五邊形 ABCDE。
4. 以 A'B'C'D'E' 標示影像，使 A A' , B B' , C C' , D D' 及 E E'。

探究活動：

1. 完成表 4.3。

旋轉角	旋轉方向*	A (,)	B (,)	C (,)	D (,)	E (,)
90°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)
180°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)
270°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)
360°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)

註：*順時針/逆時針

表 4.3

2. 影像頂點的坐標與原來圖形頂點的坐標有沒有關係？如果有的話，請簡略描述。

示例4

3. 拖曳五邊形 ABCDE 的頂點至網格中其它的位置,關係是否仍然成立?就 90° , 180° , 270° 及 360° 的旋轉,寫下你的猜想。

猜想：

4. (a) 當以原點作為旋轉中心,旋轉角度是 90° 的負倍數時,旋轉的方向有何不同?

- (b) 完成表 4.4。

旋轉角	旋轉方向*	A(,)	B(,)	C(,)	D(,)	E(,)
-90°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)
-180°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)
-270°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)
-360°		A'(,)	B'(,)	C'(,)	D'(,)	E'(,)

註：*順時針/逆時針

表 4.4

- (c) 試用符號代表 (x,y) 點經過 90° , 180° , 270° , 360° , -90° , -180° , -270° 及 -360° 的旋轉結果。

Geometer's Sketchpad

5. 挑戰題：

以符號表示多邊形的任何一個頂點 (x, y) ，沿圖形上的另一個頂點 (a, b) 作為旋轉中心，經過 90° 旋轉的結果。

教師注意事項：

- 當利用軟件進行有關平移的活動時，教師應向學生解釋何謂向量，但無需深入處理。教師只需解釋向量為一條有方向的線段，它顯示平移的方向，而它的長度則表示平移的距離。
- 教師進行活動前，應先教導學生如何使用符號去表達變換。
- 工作紙 4.1 的建議答案：

第 I 部分：平移

標示向量		以符號表示的平移
由	至	
P	Q	$(x, y) \rightarrow (x+3, y)$
Q	P	$(x, y) \rightarrow (x-3, y)$
R	Q	$(x, y) \rightarrow (x, y+2)$
Q	R	$(x, y) \rightarrow (x, y-2)$
R	P	$(x, y) \rightarrow (x-3, y+2)$
Q	S	$(x, y) \rightarrow (x-4, y-6)$

第 II 部分：反射

反射軸(鏡)	以符號表示的反射
(a) x 軸	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$
(b) y 軸	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
(c) 平行於 x 軸的直線	
(i) $y = -1$	(i) $(x, y) \rightarrow (x, -y-2)$
(ii) $y = 2$	(ii) $(x, y) \rightarrow (x, -y+4)$
(d) 平行於 y 軸的直線	
(i) $x = -1$	(i) $(x, y) \rightarrow (-x-2, y)$
(ii) $x = 2$	(ii) $(x, y) \rightarrow (-x+4, y)$

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 代表變換先沿 y 軸作反射，然後再沿 x 軸作反射。這種變換等同一次繞原點作順時針或逆時針方向轉 180° 。當完成第 III 部分旋轉的練習題時，教師應引導學生發現此種對等性質。

第 III 部分：旋轉

旋轉角度	以符號表示旋轉
90°	$(x, y) \rightarrow (-y, x)$
180°	$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
270°	$(x, y) \rightarrow (y, -x)$
360°	$(x, y) \rightarrow (x, y)$

第 3 點的猜想：一個正數的旋轉角度表示逆時針方向旋轉。

第 4 點的答案：一個負數的旋轉角度表示順時針方向旋轉。逆時針方向沿原點轉角度 θ 等同於順時針方向沿原點轉角度 $360^\circ - \theta$ 。

旋轉角度	以符號表示旋轉
-90°	$(x, y) \rightarrow (y, -x)$
-180°	$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
-270°	$(x, y) \rightarrow (-y, x)$
-360°	$(x, y) \rightarrow (x, y)$

4. 挑戰題答案：

$(x, y) \rightarrow (-y+a+b, x-a+b)$ 代表沿圖形其中一個頂點 (a, b) 作 90° 的旋轉。

操作程序：

(I) 作直角坐標平面

1. 點按工具列中的 **Graph** 按鈕，選擇 **Create Axes**。
2. 點按 **Graph** 按鈕，選擇 **Show Grid**。

(II) 構作多邊形

1. 點按 **Segment** 按鈕  於繪圖區繪畫一個多邊形。
2. 點按 **Text** 按鈕  去標示頂點的名稱。
3. 雙按滑鼠可為頂點重新命名。

(III) 量度點的坐標

1. 點按 **Selection Arrow** 按鈕 ，按下 **Shift** 鍵，並選擇所有的點。
2. 點按 **Measure** 按鈕，選擇 **Coordinates**。

(IV) 繪畫及標示點

1. 點按 **Graph** 按鈕，選擇 **Plot Points**。
2. 鍵入點的坐標，點按 **OK**。
3. 點按 **Text** 按鈕 ，標示所畫的點，如 P，Q，R 和 S。

(V) 平移圖形

1. 點按 **Selection Arrow** 按鈕 ，按下 **Shift** 鍵，並選擇兩點例如 P 和 R。
2. 點按 **Transform** 按鈕，選擇 **Mark Vector**。
3. 點選需要平移的圖形。(若想同時選擇取多個圖形，則須先按下 **Shift** 鍵)
4. 點按 **Transform** 按鈕，選擇 **Translate**。
5. 點按 **Text** 按鈕  去標示影像。

(VI) 反射圖形

1. 點按 **Selection Arrow** 按鈕 ，點按反射軸，例如 x 軸。(如果反射軸不是兩軸而是其它的線，則必須在此步驟前利用 **Line** 工具，去繪畫此線。)
2. 點按 **Transform** 按鈕，選擇 **Mark Mirror**。
3. 點選需要反射的圖形。(若想同時選擇多個圖形，則須先按下 **Shift** 鍵。)
4. 點按 **Transform** 按鈕，選擇 **Reflect**。
5. 點按 **Text** 按鈕  去標示影像。

(VII) 旋轉圖形

1. 點按 **Selection Arrow** 按鈕 ，選擇平面上的一點作旋轉中心。(如果圍繞原點作旋轉，那麼原點便是旋轉中心。)
2. 點按 **Transform** 按鈕，選擇 **Mark Centre**。
3. 點選需要旋轉的圖形。(若想同時選擇多個圖形，則須先按下 **Shift** 鍵。)
4. 點按 **Transform** 按鈕，選擇 **Rotate**。
5. 鍵入旋轉角度例如 90° ，然後點按 **OK**。
6. 點按 **Text** 按鈕  去標示影像。