

示例



聯立線性方程的解的數目

目標： 探究聯立線性方程的解的數目

學習範疇： 數與代數

學習單位： 二元一次方程

學習階段： 第三學習階段

所需教材： *Excel* 及檔案 10_ex_c.xls

預備知識： (1) 二元一次方程的圖像
(2) 以代數方法及圖解法去解聯立線性方程

活動內容：

1. 教師與學生簡略地溫習解聯立線性方程的方法。
2. 教師將學生分組。
3. 教師派發工作紙 10.1 予學生。
4. 學生以代數方法去解工作紙 10.1 的第 1 題。
5. 當學生完成第 1 題後，開啟 *Excel* 檔案 10_ex_c.xls 以完成第 2 至 7 題。檔案內有一個 Visual Basic 的應用程式。此程式能讓學生點按內置按鈕去觀看圖像的互動變化(參閱圖 10.1)。
6. 邀請一些組別代表向全班匯報其結果及結論。教師可給予評語及作出總結。

工作紙 10.1：聯立線性方程的解的數目

第 I 部分

1. 以代數方法解以下列聯立線性方程。

$$\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x-3y+7=0 \end{cases}$$

2. 開啟 *Excel* 檔案 10_ex_c.xls。

此 *Excel* 檔案提供一程式以圖解法去解聯立方程

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$$

其中 a, b, c, p, q 及 r 為實數。

在儲存格 B2, G2, L2, B6, G6 及 L6 上分別輸入 a, b, c, p, q 及 r 的數值，再次試解問題 1。

你可以從圖像或從表格中找出題解。

答案：

(a) 圖像共有 _____ 個交點。

(b) 問題共有 _____ 解。

(c) 方程的解是 (,)。

Excel

3. 利用 *Excel* 檔案去找出表 10.1 中的聯立線性方程的解的數目及交點的數目。

(a)

方程 1 $ax+by+c=0$	方程 2 $px+qy+r=0$	解的 數目	交點的 數目	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{q}$
$3x-y=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+1=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+2=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+3=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+4=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+5=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+6=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+7=0$	$2x-3y+7=0$				
$3x-y+8=0$	$2x-3y+7=0$				

表 10.1

若想改變 c 的數值，你可以直接將數值鍵入儲存格 L2 或在儲存格 M2 上點按 **SpinUp** 按鈕  或 **SpinDown** 按鈕 。

在儲存格 W1 上點按 **SpinUp** 按鈕  或 **SpinDown** 按鈕  可以改變表格中的 x 之起始值。

- (b) 點按儲存格 M2 的 **Spin Button** 按鈕  以改變 c 的數值後，方程 1 的圖像有甚麼改變？

- (c) 根據表 10.1 的結果， $\frac{a}{p}$ 和 $\frac{b}{q}$ 之間有沒有任何關係？

- (d) 選擇 a, b 及 c 的其他數值，並把它鍵入 *Excel* 檔案中。對於 a 和 b 的每一個數值，點按 c 值的 **SpinButton** 按鈕  以改變其數值。

觀察 c 的不同數值對於題解數目的影響。寫你的結論，並與組員討論所得結論。

Excel

第 II 部分

4. 根據聯立線性方程 $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ -4x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ ，輸入 a, b, c, p, q 及 r 的數值於 Excel

檔案中。

- (a) 兩方程的圖像是否相交？ _____
- (b) 有多少解能同時滿足這兩條方程？ _____
- (c) 此兩圖像有甚麼關係？ _____
- (d) 交點數目與題解數目有甚麼關係？ _____
- _____
- _____

你可以透過點按在儲存格 W1 中的 **SpinButton** 按鈕  去改變 x 的起始值，並觀察兩圖像是否相交。

5. 在某些情況下你會觀察到圖像是沒有交點的。因此，該聯立線性方程便沒有解。
- (a) 表 10.2 中沒有提供某些方程，構想適當的方程使到每題的聯立線性方程均沒有解。將答案填寫於表內。

問題	方程 1 $ax+by+c=0$	方程 2 $px+qy+r=0$	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{q}$	$\frac{c}{r}$
1	$x+2y-3=0$				
2	$3x+y+1=0$				
3	$x-2y=0$				
4		$4x+3y-5=0$			
5		$-2x+y+10=0$			
6		$x+y+3=0$			

表 10.2

(b) 當聯立線性方程
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$$

沒有解時，根據表 10.2 的結果，你認為 a, b, c, p, q 及 r 之間有什麼關係？

Excel

第 III 部分

6. 已知聯立線性方程
$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ -4x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

在 *Excel* 檔案中輸入 a, b, c, p, q 及 r 的對應數值。選取 -3 為第二方程的 r 數值。

(a) 點按 r 的 **SpinButton** 按鈕  改變 r 的數值使兩圖像重疊， r 的數值是多少？

(b) 能否從 *Excel* 檔案的表格中提出一些可能的解？寫下部分的解：

(,), (,), (,), (,)。

(c) 從上述結果中，你得出甚麼結論？請寫下。

(d) 當 $ax+by+c=0$ 及 $px+qy+r=0$ 兩圖像重疊時， a, b, c, p, q 及 r 有何關係？

第 IV 部分

結論：

7. 總結你從第 I、II 及 III 部分的結果，寫下你的結論。根據方程 $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$ ，

完成下表。

交點數目	解的數目	a, b, c, p, q 及 r 的關係
0		
1		
無限		

Excel

教師注意事項：

1. 本示例工作紙的目的是讓學生探究聯立方程的題解的數目而非去找出解。故此，在此示例中，圖像的主要作用是用來顯示交點。第 I 部分集中討論兩條非平行的線，第 II 部分著重兩條平行線，而第 III 部分則著重兩線重疊的線。
2. 學生不難從圖像中觀察到交點的數目可以是 0, 1 或無限多個。學生可利用超過一個解來描述無限多個解的情況。教師亦可向學生介紹「無限多個解」,「一個解」及「沒有解」這些名詞的意思。至於「一致性」及「不一致性」這兩個名詞，則可以讓能力較佳的學生認識。
3. 在 Excel 檔案中，若在儲存格 G2 的 b 的數值設為零時，在繪畫圖像上將面對困難。原因是計算 y 數值時，是取用公式 $y = \frac{-(ax+c)}{b}$ 中 x 的原始值。當 b 是非零時，y 才有意義。教師可將此特殊情況向學生講解。在此情況下，圖像是一條垂直線。
4. 工作紙 10.1 的建議答案：

問題		答案					
1		(1,3)					
2		(a) 1 (b) 1 (c) (1,3)					
3	(a)	方程 1 $ax+by+c=0$	方程 2 $px+qy+r=0$	解的數目	相交點的數目	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{q}$
		$3x-y=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+1=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+2=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+3=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+4=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+5=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+6=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+7=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3
		$3x-y+8=0$	$2x-3y+7=0$	1	1	3/2	1/3

3	(b) 圖像往上移或往下移。所有線均與原來的線平行。						
	(c) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ 。						
	(d) 當原來的方程只有一個解時，改變 c 的數值對於題解的數目是沒有影響的。						
4	(a) 否						
	(b) 0						
	(c) 互相平行						
	(d) 數目相同						
5	(a)	問題	方程 1	方程 2	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{q}$	$\frac{c}{r}$
			$ax+by+c=0$	$px+qy+r=0$			
		1	$x+2y-3=0$	$x+2y=0$	1	1	$-\frac{3}{2}$
		2	$3x+y+1=0$	$6x+2y+3=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
		3	$x-2y=0$	$x-2y+5=0$	1	1	0
		4	$4x+3y+2=0$	$4x+3y-5=0$	1	1	$-\frac{2}{5}$
		5	$2x-y+10=0$	$-2x+y+10=0$	-1	-1	1
	6	$-3x-3y+1=0$	$x+y+3=0$	-3	-3	$\frac{1}{3}$	
	(b)	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$					
6	(a)	-8					
	(b)	(-2,0), (-1,2), (0,4), (1,6)等。					
	(c)	當兩線重疊時，將會有無限多個解。					
	(d)	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$					
7	交點數目	解的數目	a, b, c, p, q 及 r 的關係				
	0	0	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$				
	1	1	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$				
	無限	無限	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$				

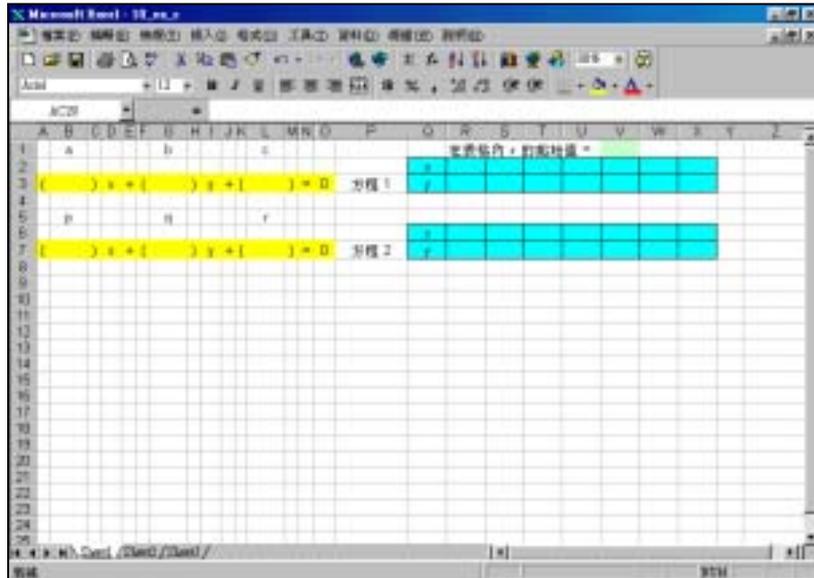
附註：5(a)表內的答案(粗體字部分)，並非惟一的答案。

Excel

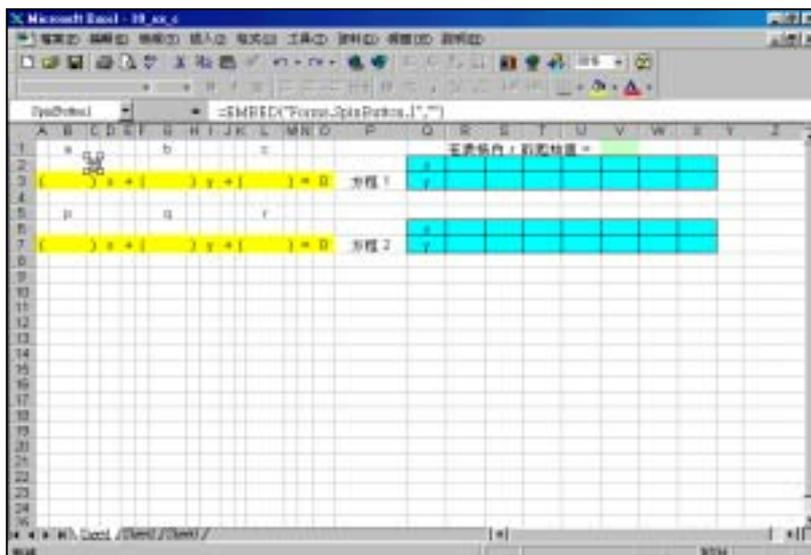
操作程序：

(I) 製作 SpinUp 及 SpinDown 按鈕以改變儲存格內的數值

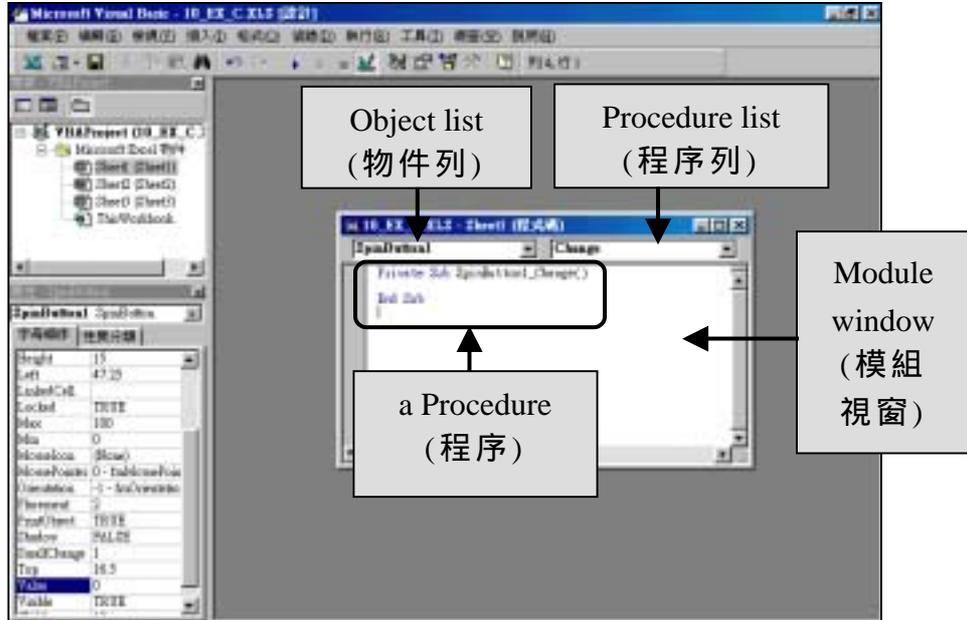
1. 開啟新的 *Excel* 檔案。
2. 製作工作紙，其格式如下圖所示。
3. 對於每一欄選取合適欄闊。



4. 從下拉選單中選取檢視 工具列 控制工具箱。
5. 點選 **SpinButton** 按鈕  在儲存格 C2 上點按滑鼠一次，以便放上 **SpinButton** 按鈕。參閱下圖。

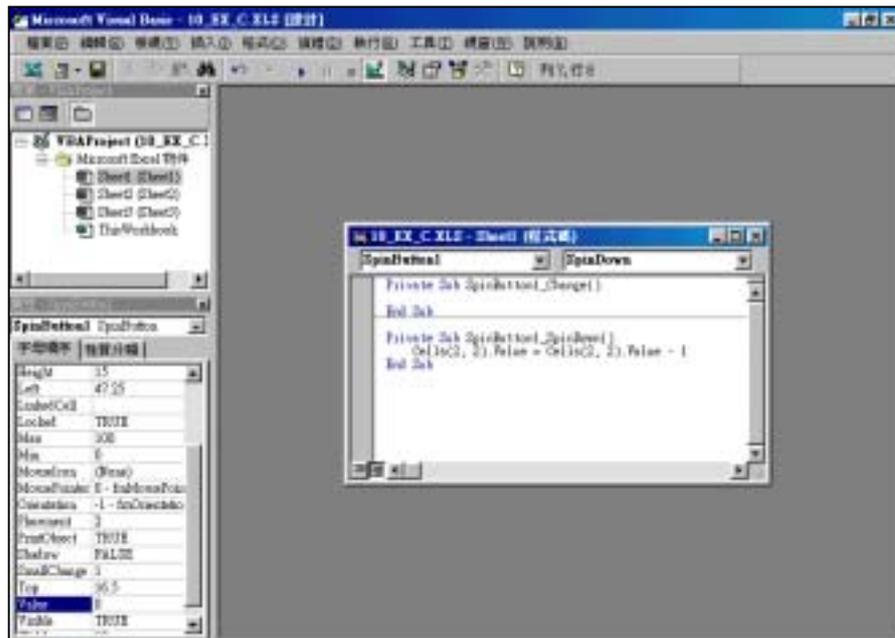


6. 雙按 **SpinButton** 按鈕  以開啟 Visual Basic Editor。在程式碼視窗內，有以下各項：物件列、程序列、模組視窗和一個程序(如下圖所示)。



7. 點選 **Procedure list**(程序列)中的 **SpinDown**。

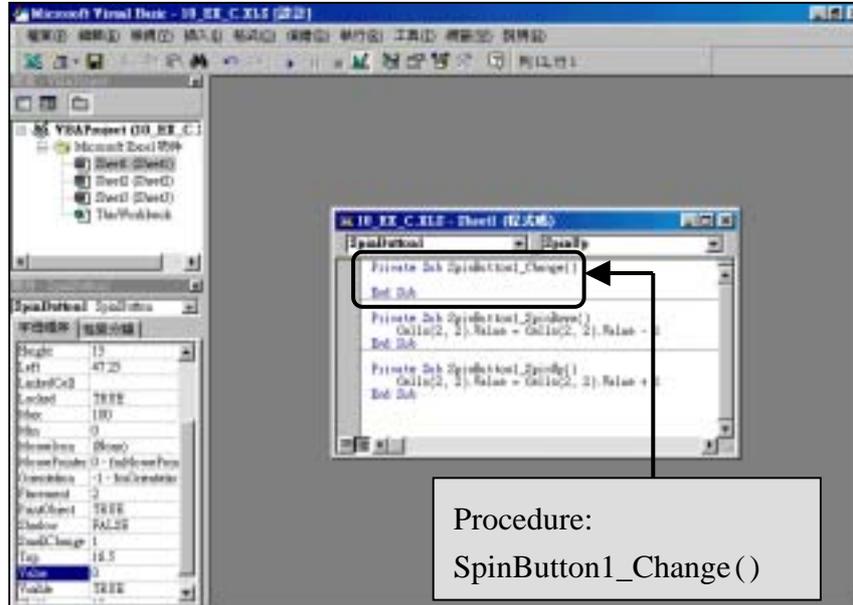
在 **SpinDown** 程序的第二行中鍵入“Cells(2,2).Value=Cells(2,2).Value-1”，使 **SpinDown** 步驟能生效(如下圖所示)。每次按 **SpinDown** 按鈕時，儲存格 B2 的數值將減少 1。注意“Cells(i,j)”代表在第 i 行及第 j 列的儲存格。



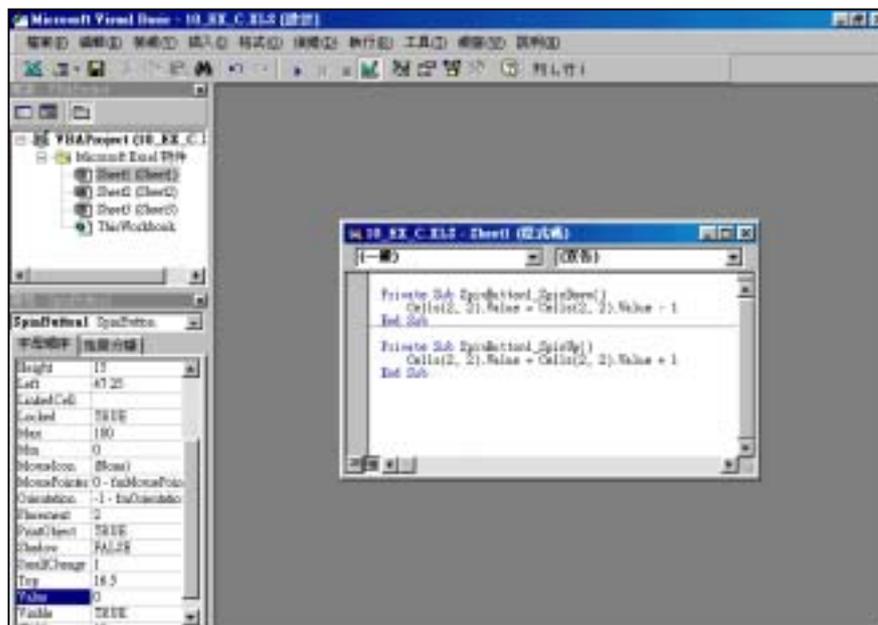
Excel

8. 點選 **Procedure list**(程序列)中的 **SpinUp**。

在 **SpinUp** 程序的第二行中鍵入“Cells(2,2). Value=Cells(2,2).Value+1” ,
使 **SpinUp** 步驟能生效(如下圖所示)。



9. 刪除 Procedure (程序)中的 “Private Sub SpinButton1_Change()” 和 “EndSub” , 結果如下圖所示。



10. 從 Tool bar 上取消設計模式  的選擇。點按工具列中 *Excel* 按鈕  回到 *Excel* 工作表。按 **SpinUp** 按鈕  及 **SpinDown** 按鈕  儲存格 B2 的數值會隨著改變。
11. 以類似方法在儲存格 H2, M2, C6, H6, M6 及 W1 中加入 SpinButton。

(II) 製作表格及繪畫一次方程的圖像

1. 在儲存格 R2 中鍵入公式“=V1”使將儲存格 V1 中 x 的起始值抄到儲存格 R2。
2. 在儲存格 S2 中鍵入公式“=R2+1”使儲存格 R2 的數值加 1。
3. 選擇儲存格 S2。將滑鼠移往儲存格 S2 的右下角。拖曳儲存格 S2 的填滿控點至 X2，將儲存格 S2 的公式抄到儲存格 T2 至 X2。
4. 在儲存格 R3 中鍵入 “=(\$B\$2*R2+\$L\$2)*(-1)/\$G\$2” 以代表公式 $y = \frac{(ax + c) \times (-1)}{b}$ ，然後按 **Enter**。選擇儲存格 R3。拖曳儲存格 R3 的填滿控點至 X3 使將儲存格 R3 的公式抄到儲存格 S3 至 X3。
5. 要繪畫聯立線性方程的圖像，選取圖表精靈按鈕  及選擇圖表類型：「XY 散佈圖」及副圖表類形「帶有折線的 XY 散佈圖」。按照對話盒的步驟直至完成繪圖。

(III) 保護工作表

1. 開啟上述 *Excel* 檔案
2. 選擇儲存格 B2。按滑鼠右鍵選擇**儲存格格式**。選擇**保護**選單。消除選擇**鎖定**及按**確定**。以同一方法消除鎖定儲存格 G2, L2, B6, G6, L6 及 V1。
3. 在下拉選單中選取**工具 | 保護 | 保護工作表**。輸入你的密碼，再按**確定**。工作表將被保護，你只能改變以上沒有鎖定的儲存格的數值。
4. 要取消保護工作表，在下拉選單中選取**工具 | 保護 | 取消保護工作表**。輸入原先選定的密碼即可。