



示例 6：探究圓形面積的公式

學習範疇： 度量、圖形與空間

學習單位： 面積和體積的簡單概念

學習階段： 第三學習階段

所需教材： 甲部方法 2 須用 *Sketchpad* 軟件

預備知識： 三角形面積公式、圓周公式

主要特徵：

本示例包含兩部分，甲部讓教師透過兩個難度不同的方法，讓學生探究圓面積的公式，以照顧學生在學習能力上的差異。此外，因能力較高學生可能須較少時間參與甲部的活動，故能騰出時間進行乙部的活動，在這部分，學生可以透過專題習作的形式探討估計值的方法。

部分		能力稍遜學生	一般能力學生	能力較佳學生
甲	方法 1	✓	✓ 或	
	方法 2		✓	✓
乙			✓	✓

註：✓ 表示學生在開始學習上述課題時可以進行的部分。

甲部：導出圓面積的公式

方法 1：本活動提供一個證明圓面積公式的簡單方法。一個圓被分割成數目為雙數的細小扇形，從而組成一個近似平行四邊形的圖形。由此圖形可推出圓面積的公式。

方法 2：本活動相對方法 1 略為困難。學生可利用增加圓內接正多邊形的邊數來逼近圓的面積。透過此活動學生可認識及欣賞前人在尋找圓面積及 的近似值上的努力。

示例 6

乙部：探討估計 值的方法

本部分可作為學生的專題作業，要求他們探討估計 值的方法。學生需要自行由互聯網，錄像或參考書中搜集有關資料。這作業有助學生擴闊他們在數學上的視野，從而欣賞數學家在這方面所作出的努力。

活動內容：



甲部：導出圓面積的公式

方法 1

1. 將一個半徑為 r 的圓形分割為 8 個相等的扇形。重組這些扇形來組成一個類似平行四邊形的圖形，如圖 1。

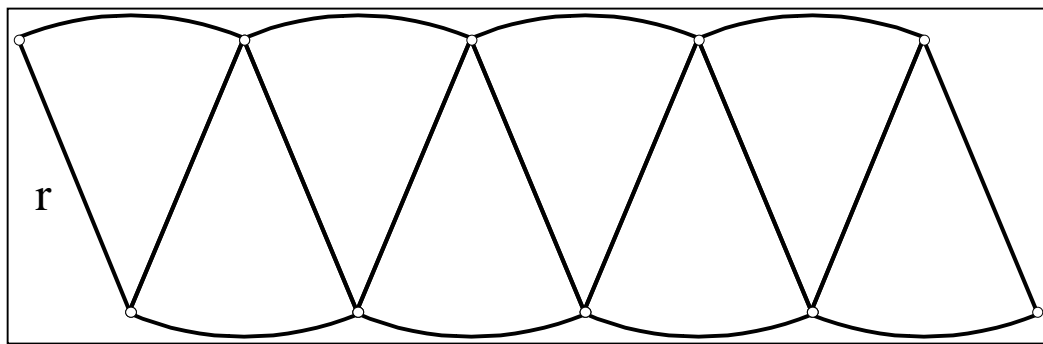


圖 1

2. 要求學生找出這圖形的面積。由於這圖形的“底”並非直線，他們不能由簡單公式找出圖形面積。
3. 展示另一個和以上一樣大小的圓形。將這圓形分成 18 份相等的扇形。將扇形重組如上。圖 2 為一個說明圖示。

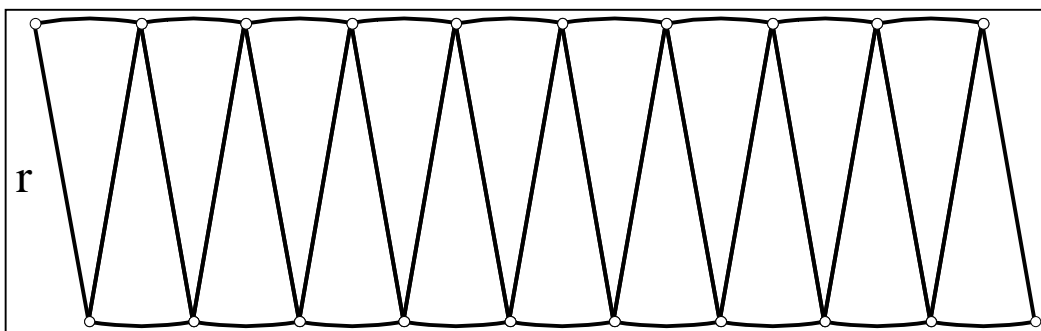


圖 2

-
4. 引導學生描述圖 1 及圖 2 的相異之處。要求學生回答下列問題：
 - (a) 如果我們增加圓形上的扇形數目，所組成圖形的“底”有什麼改變？
 - (b) 如果我們將圓形分割成接近無限數量的扇形，那麼這個圖形會變為怎樣？
 - (c) 這個圖形的高和底是多少？
 - (d) 這個圖形的面積是多少？

 5. 要求學生對圓面積公式作出猜測，然後透過全班討論，作出總結。教師應引導學生觀察出當在極限的情況，圓形分割為無限數量的扇形時，所組成的圖形的高及底分別為 r 及 πr ，而面積為 πr^2 的長方形。所以，圓形面積亦約為 πr^2 。

方法 2

1. 向學生展示一方格紙。在方格紙上有一個半徑為 r 的圓形。EFGH 為一個外切正方形。利用兩條互相垂直的直徑將圓形分為 4 等分。它們亦將大正方形 EFGH 分為 4 個相等的小正方形(見圖 3)。

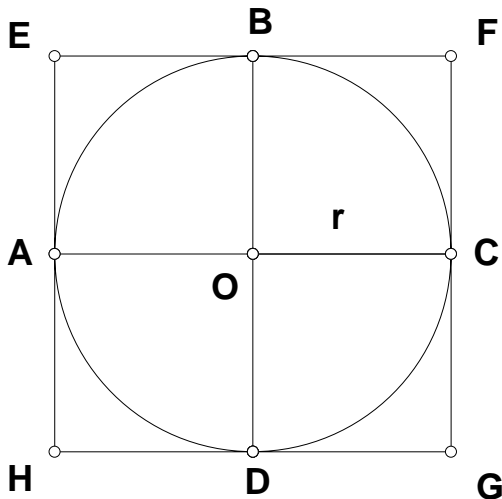


圖 3

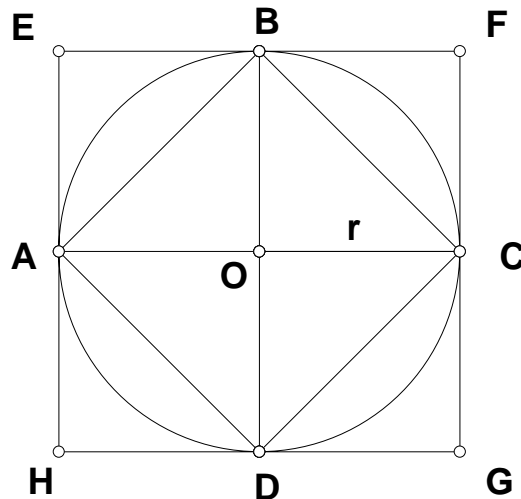


圖 4

2. 要求學生回答下列問題。
 - (a) 小正方形 OAEB 的面積是多少？
 - (b) 正方形 EFGH 的面積是多少？
 - (c) 圓形的面積是大於還是小於正方形 EFGH 的面積？為什麼？

- (c) 如有一個內接正 n 邊形在圓形內，以 a 、 b 和 n 來表示它的面積。
- (d) 當正多邊形的邊數(即 n 值)增加時， a 會趨向什麼？
- (e) 正 n 邊形的周界是什麼？當 n 值增加時，正多邊形的周界會趨向什麼？
- (f) 圓周的公式是什麼？當 n 趨向無限大時，利用以上結果，重寫正多邊形面積的表示式來表示圓形面積。

8. 介紹古代數學家(包括劉徽)利用這方法來估計圓形面積及 π 值的故事。



乙部：探討估計 π 值的方法

1. 要求學生進行一專題習作，探討前人在估計 π 值上的不同嘗試。這些方法包括：

(a) 亞基米德(Archimedes)的方法：計算內接正 n 邊形和外切正 n 邊形的周界來接近圓形的面積。內接正多邊形的周界比圓周小，而外切正多邊形的周界則比圓周大。亞基米德利用一個 96 邊的多邊形證出

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

(b) 巴鳳的針(Buffon's needle)方法：由拋針實驗計算 π 值。將一組距離為 d 的平行線放在地上，然後將長度為 L 的針拋在這些線上($d > L$)。重複這實驗 N 次，並假設針接觸到其中一條線的數目為 k 。當 N 足夠大時， π 的近似值為 $\frac{2LN}{kd}$ 。

(c) 華理斯(John Wallis)公式：華理斯以無數極小的長方形，求出四分一圓面積的近似值。公式是

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \dots}$$

2. 因為求得 π 值公式的有關數學知識大部分都超越了學生的學術水平，故此他們不一定能明白這些數學知識。然而，學生應該要明白求得有關公式的過程及背後的意念。

示例 6

教師注意事項：

1. 甲部活動中方法 1 的問題之建議答案：
 - 4(a)：當我們在圓形上分割更多扇形時，圖形的“底”會類似一條直線。
 - 4(b)：圖形會變為一個平行四邊形或長方形。
 - 4(c)：圖形的高度為 r ，底的長度為圓周的一半，即是 πr 。
 - 4(d)：圖形的面積為 πr^2 。

2. 甲部活動中方法 2 的問題之建議答案：
 - 2(a)： r^2
 - 2(b)： $4r^2$
 - 2(c)：因為圓形是正方形 EFGH 的內切圓，圓形的面積小於正方形 EFGH 的面積。
 - 3(a)： $2r^2$
 - 3(b)：圓形的面積大於正方形 ABCD 的面積，因為正方形 ABCD 是圓形的內接正方形。
 - 3(c)： $2r^2 < \text{半徑為 } r \text{ 的圓形的面積} < 4r^2$ 。
 - 5(a)：當學生拖曳“drag”這一點向右時，多邊形的邊數會增加。
 - 5(b)： a ， b 和 r 的值會分別為增加，減少及不變。
 - 5(c)：多邊形面積會增加，而且會接近圓形的面積。
 - 8(a)： $\frac{ab}{2}$
 - 8(b)： $4ab$
 - 8(c)： $\frac{abn}{2}$
 - 8(d)：圓半徑，即 r 。
 - 8(e)：周界是 bn 。當 n 增加時，正多邊形的周界會接近圓周。
 - 8(f)：圓周的公式是 $2\pi r$ 。當 n 趨向無限大時，多邊形的面積趨向 $\frac{r \times 2\pi r}{2}$ ，即 πr^2 。所以，圓形的面積是 πr^2 。

3. 教師可考慮在課堂上介紹有關 的歷史，以作為活動甲的延伸活動。或者，教師亦可要求學生作一個類似活動乙有關 的歷史的專題習作。

參考資料：

網址：

1. <http://forum.swarthmore.edu/dr.math/faq/faq.pi.html>
2. 關於亞基米德估計 值的方法，可參閱下列網址：
<http://www.math.utah.edu/~alfeld/Archimedes/Archimedes.html>
<http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html>
3. 關於巴鳳的針估計 值的方法：
<http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html>
<http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html>
<http://www.math.uah.edu/stat/buffon/buffon2.html>
4. 其它相關網頁：
<http://gallery.uunet.be/kurtvdb/pi.html>
http://www.geocities.com/hjsmith_geo/download.html#PiW

書籍及文獻：

1. Schroeder, L. (1974). Buffon's needle problem: An exciting application of many mathematical concepts. *Mathematics Teacher*, 67(2), pp. 183 – 186. Reston : National Council of Teachers of Mathematics.
2. Cheney, E.W. and Kincaid, D.R. (1999). *Numerical Mathematics and Computing*. 4th Edition. Pacific Grove, California: Brooks/Cole Publishing Company.
3. 大衛 布拉特納(1999)。《神奇的 》。台北：商業周刊出版股份有限公司。

錄像：

教師可於下列錄影帶中找到相關資料：

Project Mathematics! *The Story of Pi* ©1989 California Institute of Technology, Caltech 1 – 70, Pasadena, CA 91125