



示例 3：利用既定的算術平均數、中位數和眾數 構作一組數據

學習範疇： 數據處理

學習單位： 集中趨勢的量度

學習階段： 第三學習階段

所需教材： 無

預備知識： (1) 求某數據組的算術平均數、中位數及眾數
(2) 解簡易聯立線性方程

主要特徵：

本示例的目的是讓學生由既定的算術平均數、中位數和眾數構作一組滿足條件的數據。示例包含的三個活動的難度由淺至深循序進行。每一個活動均設計了不同的支援，包括不同的口頭指導或不同難度的問題，以協助不同學習能力的學生解決問題。活動詳情表列如下：

部分		能力稍遜學生	一般能力學生	能力較高學生
甲	給出一個平均值	✓	✓	
乙	給出兩個平均值	✓	✓	✓
丙	給出三個平均值	✓	✓	✓

註：✓ 表示學生在開始學習上述課題時可以進行的部分。

甲部：給出一個平均數的條件下，要求學生構作一組數據。對於能力稍遜的學生，教師可利用更具層次及引導性的問題幫助學生構作一組數據的基本技巧。教師引導學生發現在某些條件下沒有唯一解。對於一般能力的學生，教師可省略溫習部分，減少引導性題目和設計難度較高的題目，以引發他們在解題方面的動機。能力較佳學生可省略本部分。

示例 3

.....

乙部：在給出兩個平均數的條件下，要求學生構作一組數據。本活動可以以遊戲形式進行。能力稍遜學生須要在給出既定中位數的條件下建構一組數據，然後更改這組數據以符合算術平均數的條件。除此之外，一般能力及能力較佳學生須要構作一組四個能滿足既定中位數及眾數的數據。然後，學生要將該組四個數據改為三個但仍滿足給出既定中位數及眾數的條件。學生不難發現在此情況下是沒有解的。一般能力學生須要以口述形式表達有關的數學理由。至於能力較佳學生，他們須要書寫這沒有解的情況的有關論據。

丙部：在給出三個平均數的條件下，要求學生構作一組數據。對於能力稍遜的學生，他們須要構作一組數據以滿足三個已知的平均值。此等問題只局限於有解的情況。教師可協助學生在解決問題時作出結論。一般能力的學生不單解決以上的問題，更須要解決一些沒有解的問題，並須向全班口頭解釋其猜想。對於能力較佳的學生，他們須要解決的問題包括只有一解，沒有解或有無限多個解的情況。他們必須自行決定某一問題的解是否存在。若不存在，他們須要改變數據的數目(一般而言是增加數據的數目)以解決問題。期望這些學生透過嘗試大量不同例子後，能歸納出在甚麼條件下只有一解，沒有解或有無限多個解。

活動內容：



甲部：在給出一個平均數(例如算術平均數)的條件下建構一組數據。

能力稍遜學生	一般能力學生	能力較佳學生
<p>溫習算術平均數的意義：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 要求學生計算三個數的算術平均數，例如 3, 5 及 10。 <p>構作數據組：</p> <ol style="list-style-type: none"> 2. 將上述數據中的“10”改為“x”。若算術平均數為 6，求 x 的數值。 3. 若數據 3, y 及 x 的算術平均數為 6，求 x 及 y。 4. 要求學生比較其他學生所得的答案，引導他們發現問題有超過一個答案。 5. 引導學生觀察只要 x 及 y 能滿足 $x+y=15$，則 x 及 y 便是一個答案。 6. 要求學生構作三個以算術平均數為 6 的數據 x, y 及 z。 7. 要求學生建構另外三個數據而算術平均數仍是 6。 8. 引導學生觀察只要 x, y 及 z 能滿足 $x+y+z=18$，則它們一定是一個解。 	<p>構作數據組：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 若數據 3, y 及 x 的算術平均數為 6，求 x, y。 2. 要求學生比較其他學生所得的答案，引導他們發現問題有超過一個答案。 3. 要求學生利用算術平均數的定義及 $x+y$ 的限制條件下，解釋為何答案不是唯一。 4. 要求學生構作三個以算術平均數為 6 的數據 x, y 及 z。 5. 要求學生建構另外三個數據而算術平均數仍是 6。 6. 與學生討論答案的“非唯一性”。 7. 要求學生建構四個以算術平均數為 10 的數據。 8. 討論找出數據的策略。 	This cell is empty, representing a higher-level student who would extend the task further.

示例 3

甲部(續)

能力稍遜學生	一般能力學生	能力較佳學生
9. 要求學生構作四個以算術平均數為 10 的數據。 10. 比較上述點 8 所採用的策略。		/



乙部：在給出兩個平均數的條件下構作一組數據。

能力稍遜學生	一般能力學生	能力較佳學生
1. 將學生分組。 2. 要求學生構作三個以給出中位數(如 4)為條件的數據。 3. 著學生與組員驗算答案，並要求他們計算其數據的平均值。 4. 在黑板上寫下一個算術平均數(如 5)。要求學生與其組員討論在中位數不變的情況下改變其數據以滿足新的算術平均數。 5. 要求一些學生匯報其修改數據組所採用的策略。 6. 總結這部分與甲部所採用的策略。	1. 與能力稍遜學生提示的 1 至 6 點相同。 2. 要求學生在給出既定兩個平均數條件(例如中位數=4，眾數=5)下構作另一組四個數據。 3. 與學生討論構作數據組的策略。 4. 要求學生構作以中位數=4 及眾數=5 為條件下的三個數據。 5. 與學生討論構作此數據組的策略。 6. 要求學生口述為何不能構作該數據組。	1. 與一般能力學生提示的 1 至 5 點相同。 2. 選取一些學生向全班解釋其理由。 3. 要求學生寫下為何不能構作該組數據。



丙部：在給出三個平均數的條件下構作一組數據

能力稍遜學生	一般能力學生	能力較佳學生
<ol style="list-style-type: none"> 在黑板上寫下“算術平均數=3，中位數=4及眾數=4”。 要求學生構作一組滿足上述條件的三個數據。 提問下列問題，以引導學生發現得出數據的策略。 <ol style="list-style-type: none"> 在三個平均數中，哪一個數是你首先固定的數值？為甚麼？ 當你固定一個平均數時，這對其他兩個平均數產生甚麼限制？為甚麼？ 是否有另外一組數據也滿足上述條件？為甚麼？ 要求學生在給出同一條件下(即上述點 1 的算術平均數、中位數及眾數)構作四個數據(或五個數據，六個數據，如此類推)。 比較學生的答案及重複發問上述點 3 的問題。 與學生討論在給出算術平均數、中位數及眾數下構作數據組的一般策略。 	<ol style="list-style-type: none"> 要求學生構作一組數據而其算術平均數=3，中位數=4及眾數=4。 要求學生在給出同一條件(即點 1 的算術平均數，中位數及眾數)構作 4 個數據(或 5 個數據等如此類推)。 與學生討論在給出算術平均數、中位數及眾數下構作數據組的一般策略。 提問學生是否可以找出三個數據而其算術平均數=3，中位數=4及眾數=5。 與學生討論為何找不到滿足上述條件的數據。 提問以下問題作進一步討論： <ol style="list-style-type: none"> 能否找出一組數據滿足算術平均數=3，中位數=4及眾數=5 的條件？怎樣找出？ 可否將上述點 2 提及的數據數目增加以滿足上述條件？ 要求學生向全班匯報其解答。 	<ol style="list-style-type: none"> 將學生分組並要求學生構作以算術平均數=3，中位數=4及眾數=5 的三個數據。然後在同一條件下，構作四個、五個數據，如此類推。 與學生討論構作數據組的策略。 要求學生構作數據組以滿足下列條件： <ol style="list-style-type: none"> 構作三個數據以滿足： <ol style="list-style-type: none"> 算術平均數=5，中位數=4，眾數=4。 算術平均數=3，中位數=4，眾數=5。 構作四個數據以滿足： <ol style="list-style-type: none"> 算術平均數=3，中位數=4，眾數=5。 算術平均數=3.5，中位數=4，眾數=5。 算術平均數=3，中位數=4，眾數=4。 算術平均數=3，中位數=4，眾數=3。

示例 3



丙部(續)

能力稍遜學生	一般能力學生	能力較佳學生
		<p>4. 要求學生決定他們能否構作數據組以滿足上述條件，若是，構作該數據組。若否，修改數據的數目以滿足其要求。</p> <p>5. 討論所匯報的答案及推論出在給出三個平均數下構作三個數據時產生<u>沒有解</u>，<u>只有一個解</u>及<u>有無限多個解</u>的條件。</p>



教師注意事項：

1. 甲部選取算術平均數的目的是引導學生找出在構作數據組時必須利用以下條件：

數據值的總和 = 算術平均數 × 數據的數目。

基本上此限制條件是由算術平均數的定義而引入。在構作一組四個數據，例如算術平均數=3 時，學生會採納的一般策略為所有數據均為 3，即 3,3,3,3。接著學生會將首個數據減少 1，同時將 1 加在其他數據上。此過程不會改變算術平均數的數值。故此，數據組可以是 2,3,3,4；1,3,3,5；1,2,4,5；如此類推。

若選擇中位數，教師應著重引導學生運用中位數的定義。透過固定數據組中間的數值為中位數，可隨意改變比中位數為小的數據數值或改變比中位數為大的數據數值，只要被改變的數值仍分別小於或大於中位數。至於給出眾數的情況則類似。

2. 在乙部中，為能力稍遜學生選取了既定平均數為算術平均數及中位數。一般的策略是首先選取 $x_1, 4, x_2$ 為數據組，然後仿效甲部的題解策略。

另一方面，學生可以首先用既定的算術平均數構作數據組。然後修改數據以達至既定的中位數。

例如：首先考慮數據組為 5,5,5；3,5,7；等等。

然後改變數據以達至中位數(在此為 4)

5,5,5 至 3,4,8；2,4,9；1,4,10 等。

3,5,7 至 3,4,8；2,4,9；等。

此外，一般及能力較佳學生可以從既定的中位數及眾數下構作一組包含四個數據的數據組。一般而言，學生通常會選擇數據組為

$$x_1, x_2, 5, 5 (x_1, x_2 \leq 5) ; \text{ 或 } 5, 5, x_1, x_2 (x_1, x_2 \geq 5)。$$

若中位數為 4，則 $x_1, x_2, 5, 5$ 會變為 $x_1, 3, 5, 5$ (其中 $x_1 \leq 3$)。至於另一種情況則不須考慮。

示例 3

若將數據組的數目減至三而其他條件不變，學生會發現在此情況下將沒有解。一般能力的學生要以口述形式向全班報告其理由，而能力較佳學生則須要運用數學語言寫下其理由。

由於此情況需要三個數據，學生可以首先固定中位數。數據組變為 $x_1, 4, x_2$ 而 $x_1 \leq 4 \leq x_2$ 。另一方面，由於眾數=5， x_1 及 x_2 將等於 5。在此產生矛盾。若學生首先固定眾數，數據組則變為 $x_1, 5, 5$ 或 $5, 5, x_1$ 。將不能出現中位數為 4 的情況。

教師可與學生討論及比較上述兩種策略的優劣。

3. 在丙部，教師應小心選取三個平均數的數值予能力稍遜學生，以致問題一定有解。

可給能力較佳學生嘗試一些沒有解的問題。

4. 丙部中給能力較佳學生點 3 的答案為：

(a) (i) 有解：4, 4, 7

(ii) 沒有解 (四個數據：-1, 3, 5, 5)

(b) (i) 有解：-1, 3, 5, 5

(ii) 有解； 1, 3, 5, 5

(iii) 有無限多個解， $x_1, 4, 4, x_2$ (其中 $x_1 \leq 4 \leq x_2$ 及 $x_1 + x_2 = 4$)

(iv) 沒有解 (五個數據沒有解，六個數據：其一解為 -6, 3, 3, 5, 6, 7)

5. 丙部中給出能力較佳學生點 5 的答案如下。

構作一組三個或四個數據的條件如下：

假設給出算術平均數，中位數及眾數分別為 a, b 及 c 。

算術平均數	中位數	眾數
a	b	c

構作三個數據的數據組。

若 $b \neq c$ ，則沒有解。

若 $b = c$ 及 $a \leq c$ ，三個數據按遞升排列序分別為 $3a - 2c, c, c$ 。

若 $b = c$ 及 $a > c$ ，三個數據按遞升序排列分別為 $c, c, 3a - 2c$ 。

6. 構作四個數據的數據組。

若 $a \leq b \leq c$ ，四個數據按遞升序排列分別為

$$4a-2b-c, 2b-c, c, c。$$

若 $a \geq b \geq c$ ，四個數據按遞升序排列分別為

$$c, c, 2b-c, 4a-2b-c。$$

若 $b=c$ ，則有無限個解。四個數據按遞升排序分別為

$$2a-c-\Delta, c, c, 2a-c+\Delta \text{ 其中 } \Delta \geq |2(c-a)|。$$

在其他情況下則沒有解。

7. 教師可利用上述結果容易地構作數據。舉例來說，教師可設定算術平均數，中位數和眾數分別為 3,4 及 3。要求學生利用此條件構作四個數據。在此 $a = 3, b = 4$ 及 $c = 3$ 。由於 $b \neq c$ ，從上述點 6 中可向全班匯報在構作數據組時所產生的不一致情況。因此，學生須用五個數據去構建數據組。

8. 教師及學生可利用試算表容易地驗算其答案的真偽。