



## 示例 2：研究斐波那契數列

學習範疇： 數與代數

學習單位： 以代數語言建立問題

學習階段： 第三學習階段

所需教材： 乙部-自然界花朵的圖片

丙部-以試算表軟件如微軟 *Excel* 設計的工作紙

預備知識： (1) 觀察簡單數列規律的能力

(2) 運用代數符號表示數列的通項。

主要特徵：

本示例包含三個不同部分以照顧不同能力的學生，這三部分都是屬於課程綱要基礎部分內的同一個學習單位。

部分	能力稍遜學生	一般能力學生	能力較高學生
甲	✓	✓	✓
乙		✓	✓
丙			✓

註：✓表示學生在開始學習上述課題時可以進行的部分。

甲部：

本部分讓學生從日常生活例子中「發現」斐波那契數列(1,1,2,3,5,8...)。其中包含兩項活動 — 研究圍牆規律及上一段梯級的方法(若可以由任何一級作起點以前進一級或兩級)。前者的設計是照顧能力稍遜的學生而後者是照顧一般或能力較佳的學生。透過這項活動，學生能對遞推產生初步的認識。

乙部：

本部分為一專題習作。學生透過探究斐波那契數列與自然界的聯系，可從中欣賞數學的美感。

丙部：

學生須要研究斐波那契數列中兩個連續項的比及運用試算表軟件找尋此比的極限值。

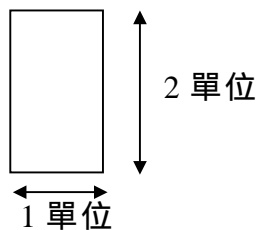
活動內容：



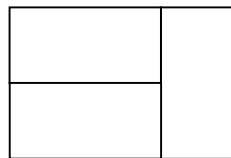
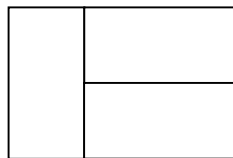
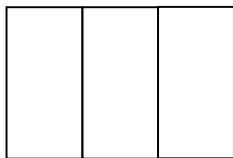
甲部：

活動 1 (給予能力稍遜學生)

所需教材：長、高分別為 1 單位及 2 單位的長方形磚塊。



1. 派發一定數量的磚塊予學生。
2. 要求學生運用磚塊去建立高 2 單位的圍牆而長度則可以為 1 單位、2 單位、3 單位等。數算不同的圍牆規律的數目。
3. 讓學生分成二人一組進行活動。
4. 教師示範如何建立一長度為 3 單位高度為 2 單位之圍牆作為例子。將可獲得三種不同規律的圍牆：



5. 分派活動 1 之工作紙 2.1 予學生及要求他們完成該工作紙。
6. 邀請學生報告他們在完成工作紙後所發現的結果。

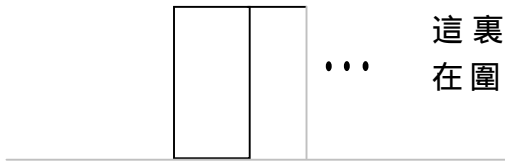
7. 與學生討論以下問題：

- (a) 從圍牆規律的數目中，你能觀察到甚麼？
- (b) 一長為 10 單位高為 2 單位的圍牆共有幾多種不同的規律？請解釋如何得出答案。
- (c) 設  $T(n)$  表示高為 2 單位，長為  $n$  單位的圍牆規律的數目。
  - (i)  $T(n-2)$  及  $T(n-1)$  有甚麼意義？
  - (ii) 能否利用代數符號  $T(n-2)$ ， $T(n-1)$  及  $T(n)$  去表示圍牆規律的關係？

8. 可進一步要求學生解釋為何條件“ $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ ，其中  $n > 2$  及  $n$  為自然數”在這項活動中的一般情況下成立。

以下提供一些指引可作參考：

情況一：



這裏有一長方形磚塊直立  
在圍牆的末端。

情況二：



這裏有兩長方形磚塊堆疊  
成為 2 單位高之圍牆末端部  
份。

- (a) 教師可引導學生考慮圍牆左端兩種不同情況。
- (b) 討論問題：
  - (i) 若以一長度為  $n$  單位而末端直立著單一長方形磚塊作考慮，現在共有多少不同種類的圍牆規律？

答：由於只須要多加一直立磚於長度為  $(n-1)$  單位的圍牆便可完成整幅圍牆，故此這裏共有  $T(n-1)$  種不同的圍牆規律。

示例 2



(ii) 若以一長度為  $n$  單位而末端有兩塊長方形磚塊堆疊的圍牆作考慮，現在共有多少不同種類的圍牆規律？

答：由於只須要多加兩塊磚於長度為  $(n-2)$  單位的圍牆便可完成整幅圍牆，故此這裏共有  $T(n-2)$  種不同的圍牆規律。

(c) 教師可幫助學生總結出長度為  $n$  單位圍牆規律的數目是長度為  $(n-1)$  圍牆規律數目及長度為  $(n-2)$  圍牆規律數目的和(即  $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ )。

9. 最後向學生介紹數列 1, 2, 3, 5, 8, ... 為斐波那契數列。



工作紙 2.1： 活動 1 建立兩單位高但不同長度的圍牆

完成下表：

圍牆長度 (單位)	圍牆規律	圍牆規律 的數目
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

觀察：若上述製作的圍牆存在規律，試描述有關規律。

---



---



---



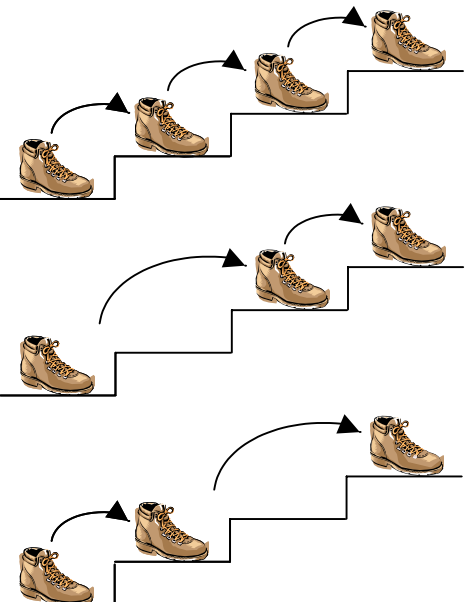
示例 2

活動 2 (給予一般能力或能力較佳學生)

1. 教師在課堂開始時向學生描述下列處境：

因為最近我想進行多一點運動，所以我到任何地方時都會嘗試行樓梯而不使用升降機。今早因為太匆忙，所以我每步踏兩級或一級樓梯。現在假設我混合使用這兩種行樓梯的方法。請問當我上  $n$  級樓梯時可用多少種不同方法呢？

2. 教師首先與學生討論如何上一級樓梯、兩級樓梯及三級樓梯，如下表。

梯級數	不同的上樓梯方法	不同方法的總數
1		1
2		2
3		3

要求學生以兩人為一組去數一數上 4 級樓梯、5 級樓梯、6 級樓梯等不同方法的總數。將結果記錄在活動 2 工作紙 2.2 的表內。尋找總數的規律。邀請學生向全班描述其發現。鼓勵他們解釋其觀察。教師在適當時間內加入評語。

3. 給予學生足夠時間將這結果歸納至上  $n$  級樓梯及運用代數符號來表達有關規律。要求學生回答活動 2 工作紙 2.2 的問題 2。
4. 當教師完成檢驗工作紙的答案後，教師可邀請一些學生解釋為何條件“ $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ ，其中  $n > 2$  及  $n$  為自然數”在活動的一般情況下成立。即是，上  $n$  級樓梯不同方法的數目等於上  $(n-1)$  級樓梯不同方法的數目及上  $(n-2)$  級樓梯不同方法的數目之和。
5. 下列問題可作為討論：
  - (a) 當你踏上第  $n$  級樓梯前，如果
    - (i) 你最後是一次過上兩級樓梯；
    - (ii) 你最後是一次過上一級樓梯；
 那一級樓梯是你首先到達的？
  - (b) 當你要上  $n$  級樓梯，而你最後一步是一次過上兩級樓梯時，共有多少種不同方法？
  - (c) 當你要上  $n$  級樓梯，而你最後一步是一次過上一級樓梯時，共有多少種不同方法？
  - (d) 當你要上  $n$  級樓梯，而你每次向上只踏一級或兩級樓梯時，共有多少種不同方法？
6. 然後教師介紹「斐波那契數列」及總結透過重複運算此數列可以算出不同的上樓梯級方法的問題。斐波那契數列是一遞推數列，而其中首兩項數值均為 1 並且每一項是可以由前兩連續項之和所形成。數列  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  可以由以下條件描述：

$T(1)=T(2)=1$  及  $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ ，其中  $n > 2$  及  $n$  為自然數。

## 工作紙 2.2 : 活動 2

假設你要上  $n$  級樓梯，並且每一次只前進一級或兩級樓梯。

1. 完成下表：

樓梯級數	不同方法的總數
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2. 設  $n$  為樓梯數目及  $T(n)$  為上  $n$  級樓梯不同方法的總數。

(a) 求  $T(15)$  的數值。

(b) 從上表中描述你所發現的規律關係。

(c) 利用代數符號如  $n$  及  $T(n)$  表示題 2(b) 部分的關係。





乙部：

要求學生進行一專題習作去研究在自然界中出現的斐波那契數列的規律如下：

1. 一分支植物的生長點的數目。



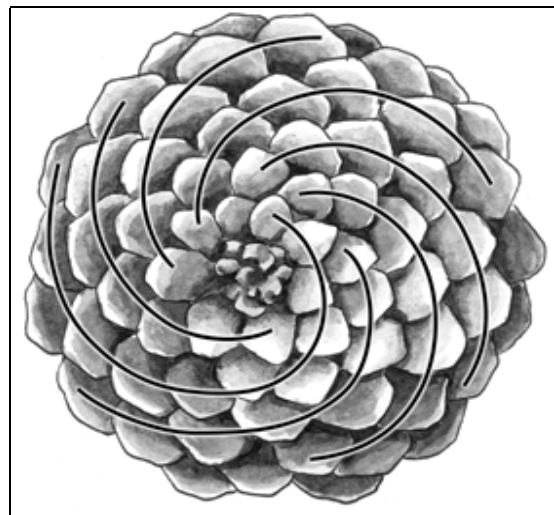
2. 搜集不同花朵的花瓣數目。



3. 花蕊上種子的排列 — 左右螺旋曲線的數目。



4. 松果的螺旋線數目。

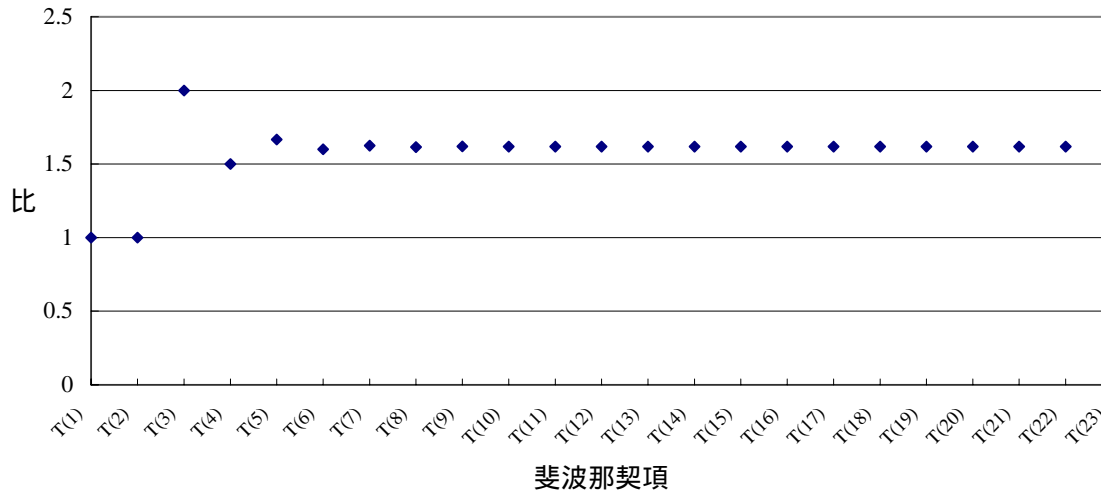


丙部：

要求學生計算兩個斐波那契數列連續項的比(以每項的前一項為分母)。作出斐波那契數列中連續項之比對於斐波那契數字的圖像如下圖所示。學生可以利用試算表工具來作圖。描述從圖像所觀察到的東西。

示例 2

斐波那契數列連續項之比



估計當他們以另一種方式計算比時(即每項除以後一項)，有甚麼事情發生。上述兩個結果又有何關係？請他們以圖像來證明他們的猜想。

教師注意事項：

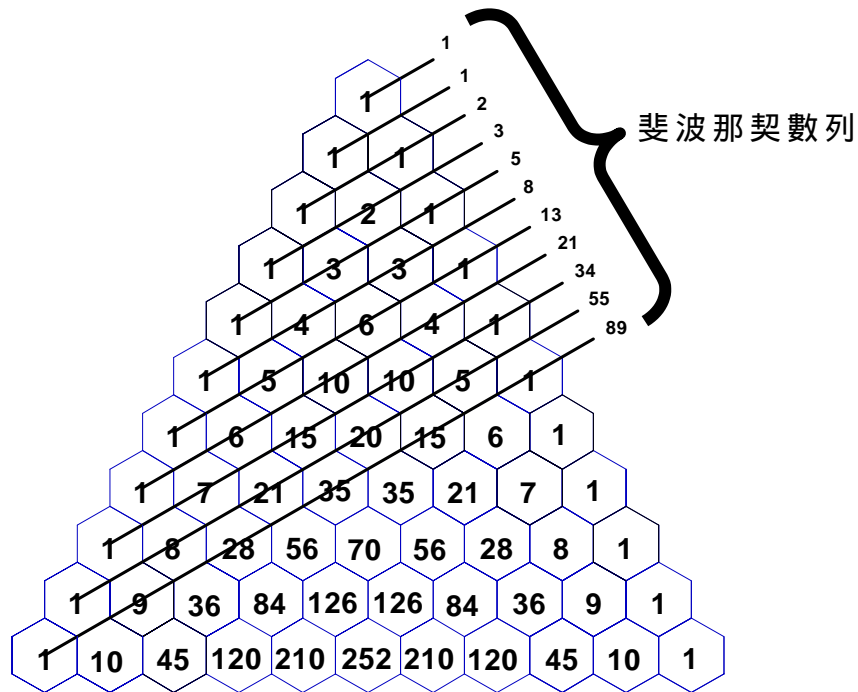
甲部：

活動 1

1. 在進行活動內容中點 7 的討論項目前，教師須要與學生重溫如何利用  $T(n)$  代表數列的第  $n$  項。
2. 圍牆規律的數目所形成的斐波那契數列可以由以下條件敘述：
  - (i)  $T(1) = 1$  及
  - (ii)  $T(2) = 2$  及
  - (iii)  $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ ，其中  $n > 2$  及  $n$  為自然數。

活動 2

1. 當引入斐波那契數列前，教師應確定學生能懂得運用函數符號  $T(n)$  表示數列的第  $n$  項。
2. 建議這部分的進一步活動：若學生曾學習帕斯卡三角圖，可要求學生在帕斯卡三角形中搜尋斐波那契數列。



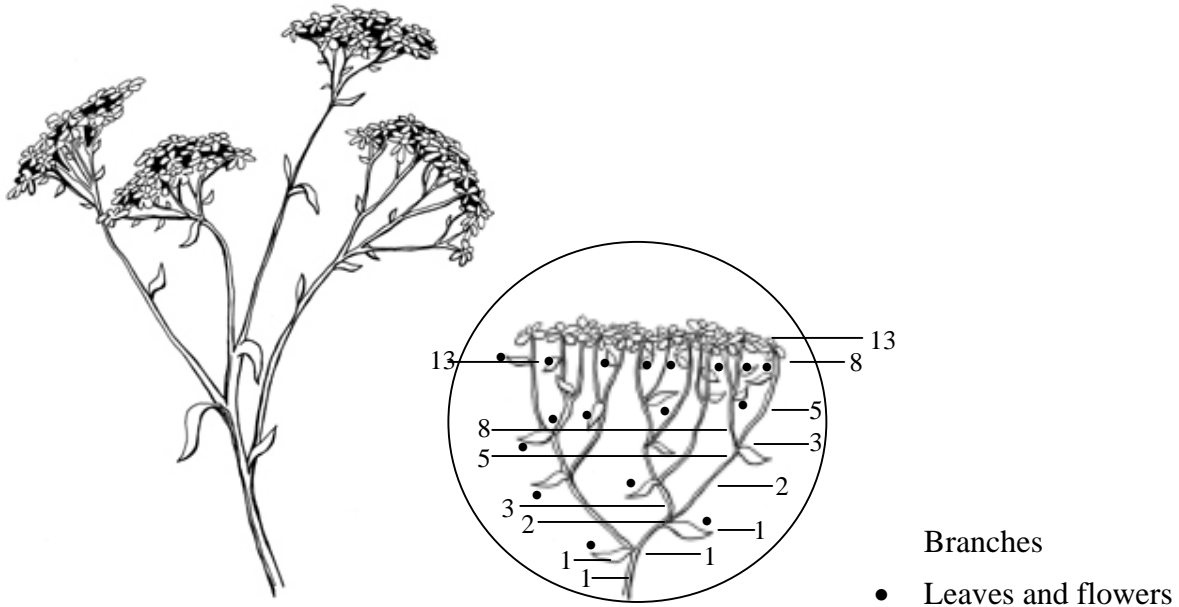
帕斯卡三角圖

乙部：

1. 這部分是一個跨課程的專題習作。學生可將從科學科及數學科所學習到的經驗組織起來。本專題習作可以考察形式進行。
2. 藉著本活動，學生應可發現
  - (a) 在某些分支植物中生長點的數目會是斐波那契數字。教師可以要求學生尋找那些植物擁有這些特質。

示例 2

在噴嚏麥植物中的斐波那契數字



(b) 花瓣的數目是一斐波那契數字

花瓣數目	種類
2	海棠
3	鐵蘭, 鳶尾
5	洋紫荊, 硬枝黃蟬, 蝴蝶蘭, 木棉, 鳳凰木
8	某些飛燕草
13	某些金盞菊
21	某些紫菀, 某些金盞菊
34	車前草, 百合花

有關花朵的參考資料可在網址 <http://www.flowerweb.com> 中找到。學生可收集一些花朵的種類去展示其結果。



海棠(2)



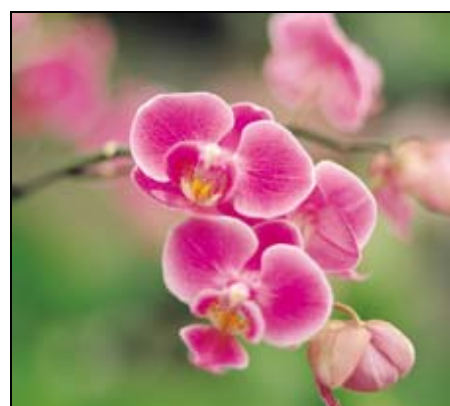
鐵蘭(3)



洋紫荊(5)



硬枝黃蟬(5)



蝴蝶蘭(5)



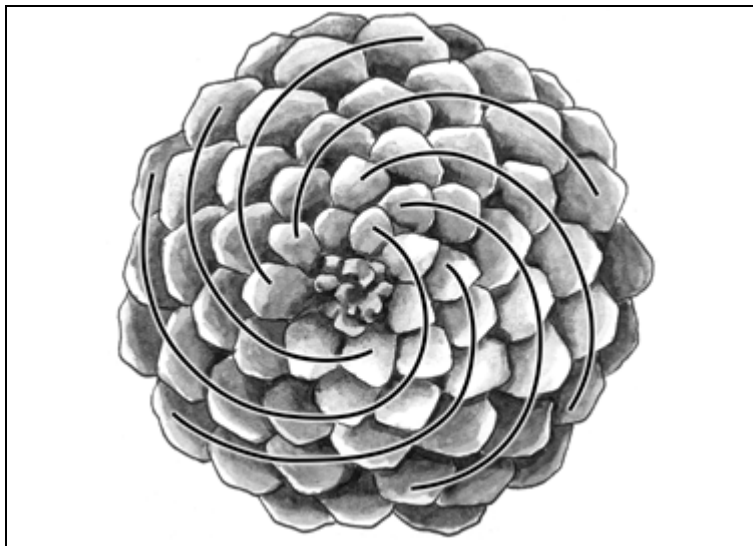
示例 2



(c) 相鄰向左或向右的種子頂部或松果之曲線數目形成斐波那契數列。



種子頂部



松果



3. 若教師在甲部引入斐波那契數列時曾利用上述的自然現象以提高學生之興趣，教師可要求學生嘗試探討斐波那契數列與菜蔬及生果的關係。

可在以下網址中找到上述的資料：

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.knott/Fibonacci/fibnat.html>

丙部：

1. 期望學生在第一情況下能找出該比趨向於一個特別數值 1.61804 而在另一種情況則為 0.618034。這兩個數字互為倒數。數字 1.61804 被稱為黃金比。

2. 教師可進一步要求學生找出黃金比如何應用在美術、建築及音樂等方面。教師可以參考下列網址：

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.knott/Fibonacci/fibInArt.html#arch>

<http://www.indiana.edu/~kglowack/athens/acropolis.html>

參考資料：

其他關於斐波那契數列和黃金比的資料：

網址：

1. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.knott/Fibonacci/fib.html>

2. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.knott/Fibonacci/fibpi.html#piandfib> 這網頁旨在探究斐波那契數列與 $\pi$ 的關係。

3. <http://www.sdstate.edu/~wcsc/http/fibhome.html>

4. <http://forum.swarthmore.edu/dr.math/tocs/golden.high.html>

5. <http://matheworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html> 這網頁包含了一些高級數學公式。

書籍：

1. Wells, David G. (1998). *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Penguin Press.

2. Runion, Garth E. (1990). *The Golden Section*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

3. Garland et al (1987). *Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

示例 2

- .....
4. Dunlap, Richard A. (1998). *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
  5. Garland, Trudi Hammel, et al (1998). *Fibonacci Fun: Fascinating Activities with Intriguing Numbers*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
  6. Pappas, Theoni (1989). *The Joy of Mathematics: Discovering Mathematics All Around You*. San Carlos, CA: World Wide Publishers/Tetra.
  7. Rockett, Andrew Mansfield (1992). *Continued Fractions*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
  8. 吳振奎編著(1993)。《斐波那契數列》。臺北：九章出版社。