



示例 1：探究三角形內的線

學習範疇： 度量、圖形與空間

學習單位： 演繹幾何簡介

學習階段： 第三學習階段

所需教材： 互動幾何軟件如 *Geometer's Sketchpad* (簡稱 *Sketchpad*)

主要特徵：

本示例包含三個部分：甲部屬於《課程綱要》內的基礎部分，乙部屬於非基礎部分而丙部則屬於適合能力較高學生的增潤項目。

部分	預備知識	能力稍遜學生	一般能力學生	能力較高學生
甲	<ul style="list-style-type: none"> 不同類型的三角形 	✓	✓	✓
乙	<ul style="list-style-type: none"> 運用資訊科技作幾何構圖的基本技巧 中線的意義 		✓	✓
丙	<ul style="list-style-type: none"> 演繹幾何的基本概念 全等和相似三角形的條件 相似三角形及平行四邊形的性質 中點定理和截線定理 		✓	✓

註：✓表示學生在開始學習上述課題時可以進行的部分。

甲部：

本部分透過學生操作 4 個不同的 *Sketchpad* 檔案，讓他們識別和探究三角形內一些特別的線(即中線、頂垂線、角平分線、垂直平分線)的性質。工作紙 1.1A 適合一般能力的學生，工作紙 1.1B 則適合能力較低的學生。透過量度 *Sketchpad* 檔案內圖形的線段長度和角的角度，學生可探討這些線的性質。此外，學生亦會探討這些線在什麼情況下重疊。

乙部：

本部分以中線作討論活動，要求學生探究和認識中線共點性質和形心劃分中線的比。學生可透過工作紙 1.2 的引導問題來發現這些性質。教師可要求學生探討在其他線上(即頂垂線、角平分線和垂直平分線)同一性質是否成立。

丙部：

要求學生對於在乙部中的發現，運用與三角形有關的結果來進行幾何證明。教師可根據學生的能力來選擇不同的策略來作證明。例如，教師可要求能力較高的學生運用中點定理來進行證明，而其他學生利用相似三角形的性質並給予提示來作出證明。

活動內容：



甲部：識別三角形內的中線、頂垂線、角平分線和垂直平分線

1. 將學生分組。每組給予 4 個 *Sketchpad* 檔案(分別是 *tri1.gsp* , *tri2.gsp* , *tri3.gsp* 和 *tri4.gsp*)，如圖 1 , 2 , 3 和 4。要求學生探究如何構作三角形中線 BE 或 GE；或線 AD 或 GD。

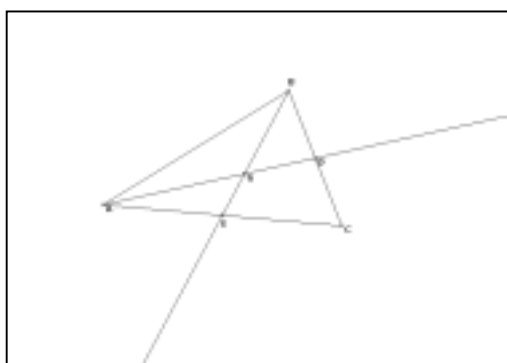


圖 1

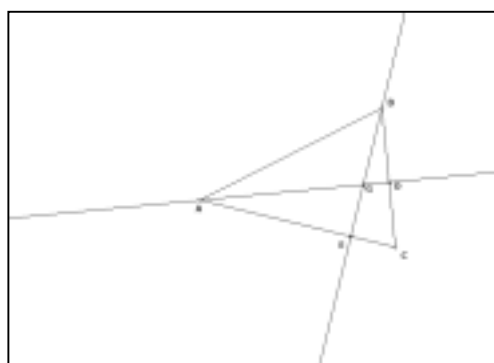


圖 2

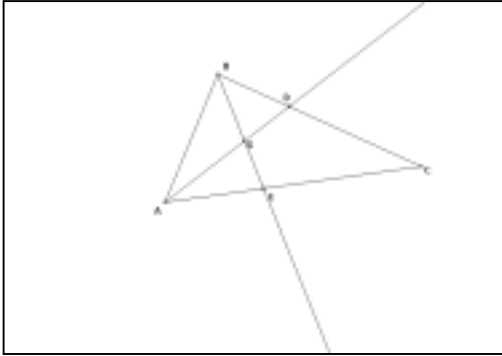


圖 3

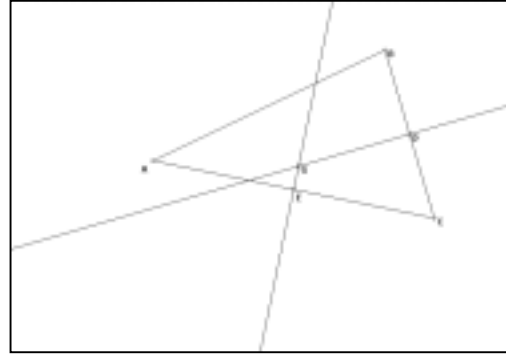


圖 4

2. 要求學生拖曳任何一頂點以改變三角形的形狀，並留意這些線的變化。他們可量度任何組成的線段長度及角度，如圖 5, 6, 7 和 8。著他們將發現寫在工作紙的甲部。工作紙 1.1A 適合一般能力的學生，而工作紙 1.1B 則適合能力較低的學生。

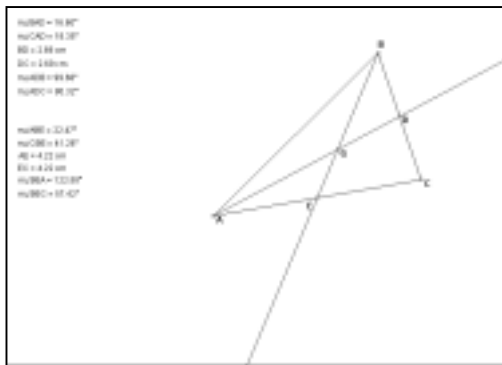


圖 5

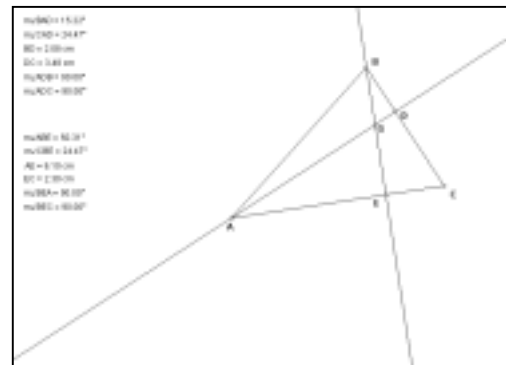


圖 6

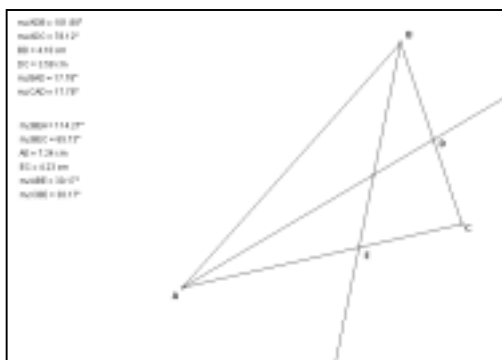


圖 7

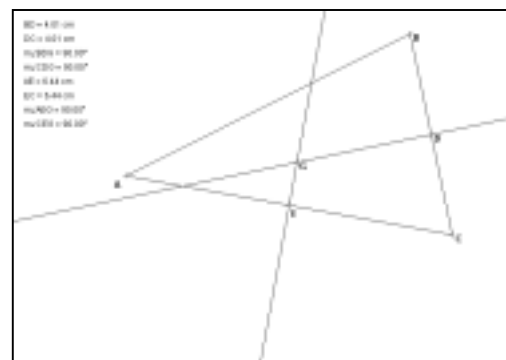


圖 8

3. 邀請每組的代表匯報他們的發現，從而總結構作這些線的條件。接著教師可介紹在圖 1 至圖 4 中這些線的名稱(分別為中線、頂垂線、角平分線和垂直平分線)。

示例 1

4. 給予學生另一個 *Sketchpad* 檔案 *tri5_c.gsp* 如圖 9。△ABC 的中線(L₁,L₁₁)，角平分線(L₂,L₂₂)，頂垂線(L₃,L₃₃)及垂直平分線(L₄,L₄₄)均可透過按隱藏 / 顯示這個按鈕來顯示或隱藏。

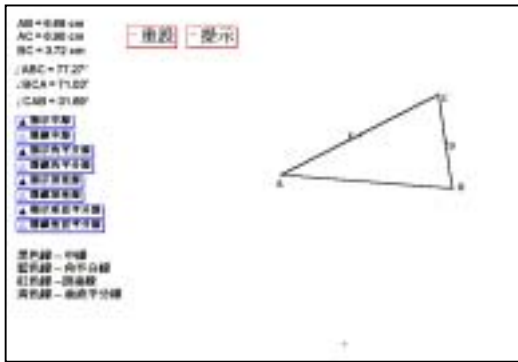


圖 9

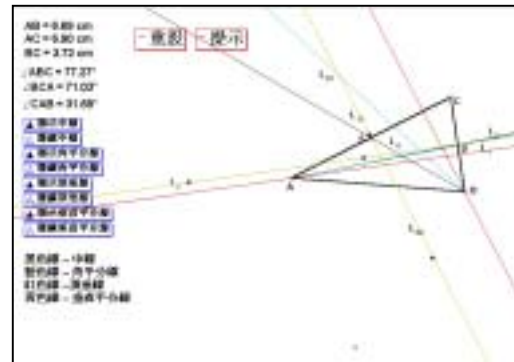


圖 10

5. 學生透過拖曳△ABC，回答工作紙乙部的問題：
- 是否在不同形狀的△ABC 中，所有線都通過對頂點？
 - 那類三角形會令到 L₁ 至 L₄₄ 中的某些線重疊？
 - 那類三角形會同時令到 L₁, L₂, L₃ 和 L₄ 四線重疊及 L₁₁, L₂₂, L₃₃ 和 L₄₄ 四線重疊？
 - (i)中線，(ii)頂垂線，(iii)角平分線，(iv)垂直平分線的相交點是否永遠都在三角形的裏面？在什麼情況下這些相交點會在三角形的外面呢？
6. 邀請一些學生報告他們的發現，教師可作出結論。如有需要，教師可示範等邊三角形能滿足上面 5(c)的條件。假若學生對背後的原因有興趣，教師可以全等三角形的條件進一步解釋以上現象。

工作紙 1.1A 探究三角形內的線

甲部

1. 探究在 *Sketchpad* 檔案 *tri1.gsp* 內 AD 和 BE 兩條線。描述如何構作這兩條線。

2. 探究在 *Sketchpad* 檔案 *tri2.gsp* 內 AD 和 BE 兩條線。描述如何構作這兩條線。

3. 探究在 *Sketchpad* 檔案 *tri3.gsp* 內 AD 和 BE 兩條線。描述如何構作這兩條線。

4. 探究在 *Sketchpad* 檔案 *tri4.gsp* 內 GD 和 GE 兩條線。描述如何構作這兩條線。

乙部

考慮在檔案 *tri5c.gsp* 內 $\triangle ABC$ 的中線、頂垂線、角平分線和垂直平分線，回答下列問題：

5. 是否在不同形狀的 $\triangle ABC$ 中，所有線都通過對頂點？

6. 那類三角形會令到 $L_1, L_{11}, L_2, L_{22}, L_3, L_{33}, L_4$ 和 L_{44} 中的一些線重疊？將你的答案繪畫在螢幕上。在這個別的三角形，是否同一類型的那兩條線(例如 L_1 和 L_{11})永遠和另一類型的兩條線(例如 L_2 和 L_{22})重疊？為什麼？

7. 那類三角形會同時令到 L_1, L_2, L_3 , 和 L_4 四線重疊及 L_{11}, L_{22}, L_{33} 和 L_{44} 四線重疊？

8. (i) 中線, (ii) 頂垂線, (iii) 角平分線, (iv) 垂直平分線的相交點是否永遠都在三角形的裏面？為什麼？

工作紙 1.1B 探究三角形內的線

甲部

1. 探究在 *Sketchpad* 的檔案 *tri1.gsp* 內 AD 和 BE 兩條線。
 在下列各項中，“✓”出能正確描述 AD 和 BE 的項目。

- 每條線均會通過三角形的其中一個頂點
- 每條線均會平分三角形的其中一條邊
- 每條線均會平分三角形的其中一個內角
- 每條線均會垂直三角形的其中一條邊

描述如何構作這兩條線。

2. 探究在 *Sketchpad* 的檔案 *tri2.gsp* 內 AD 和 BE 兩條線。
 在下列各項中，“✓”出能正確描述 AD 和 BE 的項目。。

- 每條線均會通過三角形的其中一個頂點
- 每條線均會平分三角形的其中一條邊
- 每條線均會平分三角形的其中一個內角
- 每條線均會垂直三角形的其中一條邊

描述如何構作這兩條線。

3. 探究在 *Sketchpad* 的檔案 *tri3.gsp* 內 AD 和 BE 兩條線。
 在下列各項中，“✓”出能正確描述 AD 和 BE 的項目。

- 每條線均會通過三角形的其中一個頂點
- 每條線均會平分三角形的其中一條邊
- 每條線均會平分三角形的其中一個內角
- 每條線均會垂直三角形的其中一條邊

描述如何構作這兩條線。

示例 1

工作紙 1.1B

4. 探究在 *Sketchpad* 的檔案 *tri4.gsp* 內 GD 和 GE 兩條線。

在下列各項中，“✓”出能正確描述 AD 和 BE 的項目。

- 每條線均會通過三角形的其中一個頂點
- 每條線均會平分三角形的其中一條邊
- 每條線均會平分三角形的其中一個內角
- 每條線均會垂直三角形的其中一條邊

描述如何構作這兩條線。

乙部

在 *Sketchpad* 的檔案 *tri5c.gsp* 內，拖曳 $\triangle ABC$ 的頂點。探究 $L_1, L_{11}, L_2, L_{22}, L_3, L_{33}, L_4$ 和 L_{44} 這些線的性質：

5. 是否在不同形狀的 $\triangle ABC$ 中，所有線都通過對頂點？那些線不可以？

6. 那類三角形會令到 $L_1, L_{11}, L_2, L_{22}, L_3, L_{33}, L_4$ 和 L_{44} 中的一些線重疊，例如 L_1 和 L_2 ？將你的答案顯示在螢幕上。在這個別的三角形，是否兩條中線都會和兩條角平分線重疊？

7. 那類三角形會同時令到 L_1, L_2, L_3 和 L_4 四線重疊及 L_{11}, L_{22}, L_{33} 和 L_{44} 四線重疊？

8. (i)中線，(ii)頂垂線，(iii)角平分線，(iv)垂直平分線的相交點是否永遠都在三角形的裏面？在什麼情況下這些相交點會在三角形的外面呢？



乙部：研究三角形內中線的性質

1. 將工作紙 1.2 分派給學生。要求學生根據工作紙繪圖 1 的指示構作三角形內的中線。教師可邀請一些熟悉使用 *Sketchpad* 的學生去幫助其他同學。學生可利用這圖形來探究中線的共點性。

2. 要求學生完成工作紙的探究 1：
 - (a) 當你構作第三條中線後，它是否通過 G 點？
 - (b) 移動三角形的頂點。中線相交的情形有沒有改變？
 - (c) 寫下一個關於三角形內中線相交的猜想。

3. 完成工作紙的探究 1 後，教師引領學生討論三角形內中線相交的情形。教師應總結出中線的共點性及這一相交點的名稱，並強調這一現象對於任何三角形都是正確的。

4. 要求學生透過拖曳三角形的頂點，作出其他有關形心性質的猜想。如果學生沒有任何頭緒，教師可集中發問關於邊長的問題。教師應給予學生足夠時間，讓他們作出猜測。當學生對形心劃分中線的比有一個初步的概念後，教師可邀請他們分享驗證這些猜想的方法。之後，學生可依著工作紙繪圖 2 及探究 2 的指示來驗證他們的猜想：
 - (a) 計算 $\frac{AG}{AD}$ ， $\frac{BG}{BE}$ 和 $\frac{CG}{CF}$ 的比，有什麼發現？當你改變三角形的形狀時，這些比有沒有改變？

 - (b) 計算 $\frac{AG}{GD}$ ， $\frac{BG}{GE}$ 和 $\frac{CG}{GF}$ 的比。對於形心 G 劃分三角形的中線的情形作一猜想。

5. 完成探究 2 之後，教師要求學生總結他們的發現。教師應幫助學生總結出對於任意三角形，以上比的數值不變。教師應提醒學生使用軟件量度，只是其中一種試驗猜想是否正確的方法及引導學生明白這方法的限制。對於能力較佳的學生，教師可透過丙部的活動進一步激發學生思考，以演繹方法去證明之前所得的發現。

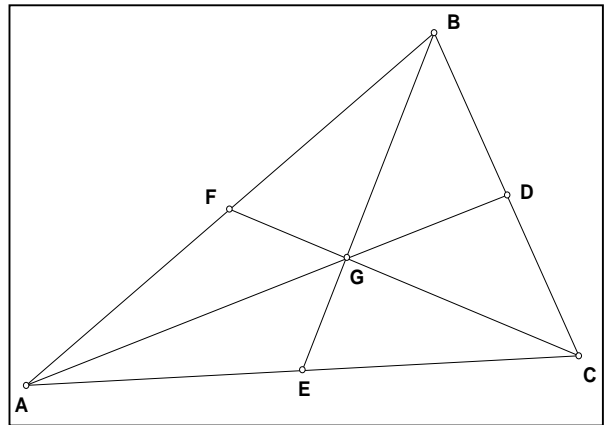
工作紙 1.2 探究三角形內中線的性質

在這張工作紙中，你要覓得三角形內三條中線之間關係的途徑：

- 用 *Sketchpad* 軟件依指示構作三角形內的中線，
- 使用這圖形來探究中線的關係，
- 將你的答案寫在工作紙內。

繪圖 1：

- 繪畫 $\triangle ABC$ 。
- 構作線段 BC 的中點。
- 將這中點稱為 D 。
- 由 A 點至 D 點畫一線段。
- 用同一方法構作第二條中線連接至 AC 。將線段 AC 的中點稱為 E 。
- 將這兩條中線的相交點稱為 G 。
- 用同一方法構作第三條中線連接 AB 。將線段 AB 的中點稱為 F 。



探究 1：

- 當你構作第三條中線後，它是否通過 G 點？

- 移動三角形的頂點。中線相交的情形有沒有改變？

- 寫下一個關於三角形內中線相交的猜想。

繪圖 2 :

- (a) 量度線段 AG 的長度。
- (b) 量度線段 AD 的長度。
- (c) 量度線段 GD 的長度。
- (d) 用同一方法量度其他中線及其部份線段的長度。

探究 2 :

1. 計算 $\frac{AG}{AD}$, $\frac{BG}{BE}$ 和 $\frac{CG}{CF}$ 的比, 有什麼發現? 當你改變三角形的形狀時, 這些比有沒有改變?

2. 計算 $\frac{AG}{GD}$, $\frac{BG}{GE}$ 和 $\frac{CG}{GF}$ 的比。對於形心 G 劃分三角形的中線的情形作一猜想。



丙部：幾何證明

1. 經過乙部的探究後，學生應可發現對於任意三角形，形心劃分中線的比是 2:1 和中線是共點的。教師引導學生設計不同的方法來證明每一個發現。
2. 對於一般能力的學生，要求他們使用三角形的相似性及全等性來進行證明(參看教師注意事項第 4 點，方法 1 及 2)。
3. 可給予這些學生一些提示。例如，於教師注意事項第 4 點的方法 1 中，教師可利用“倒著幹”方法，透過提問以下的問題，引導學生揀選合適的策略(參考圖 11)：
 - (a) 如果我們想證明 $AG:GD=2:1$ ，應考慮哪一對三角形？只考慮 $\triangle AFG$ 和 $\triangle GDC$ 是否已具備充份條件來證明猜想？應否在圖上加上其他的輔助線？
 - (b) 如果我們加上一條平行 AB 的線，稱為 DH ，應考慮哪一對三角形以證明這個比？如果我們想透過證明 $\triangle DHG \sim \triangle AFG$ 來驗證這個比，需要什麼條件來證明三角形的相似性？可考慮其餘那對三角形作為連結橋樑？
 - (c) 如果 $\triangle CDH$ 和 $\triangle CBF$ 是連結橋樑，這兩個三角形的那些關係可幫助我們證明？ $BF:DH$ 的比是什麼？ $AF:HD$ 的比是什麼？
 - (d) 我們可以證明 $\triangle DHG \sim \triangle AFG$ 嗎？ $AG:GD$ 的比是什麼？

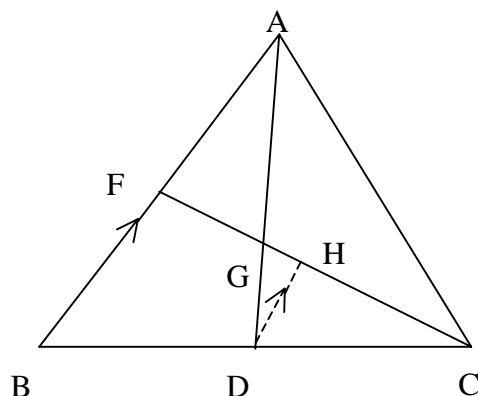


圖 11

-
4. 對於能力較高的學生，教師可要求他們使用多於一種方法來進行證明(參看教師注意事項第 4 點，方法 1 至 4)。
 5. 能力較高的學生可嘗試自行證明有關發現。然而，教師應在他們有困難時給予適當提示。

教師注意事項：

1. 教師可利用隨附的 *Sketchpad* 檔案 tri11.gsp, tri22.gsp, tri33.gsp 及 tri44.gsp 來展示圖 5 至 8 的效果。再者，教師亦可用 *Sketchpad* 檔案 tri5_2C.gsp 來示範如圖 9 各線重疊的圖像。

2. 工作紙 1.1 的建議答案：

甲部

1. 每條線由一個頂點連接至對邊的中點。
2. 每條線由一個頂點連接至對邊且垂直對邊。
3. 每條線平分三角形其中一個內角。
4. 每條線垂直三角形其中一條邊且通過這條邊的中點。

乙部

5. 不是。
6. 對於一個 $AB=AC$ 的等腰三角形，只有線 L_1, L_2, L_3 和 L_4 會重疊。同理，如果 $AB=AC$ ，線 L_{11}, L_{22}, L_{33} 和 L_{44} 會重疊。
7. 全等三角形。
8. 如果三角形是一個鈍角三角形，頂垂線的相交點和垂直平分線的相交點會在三角形的外面。

3. 工作紙 1.2 的建議答案：

探究 1

1. 是。
2. 不是。
3. 三角形的中線相交於一點。

探究 2

1. $\frac{2}{3}$ 。
2. 三個比都是 2 (或 $\frac{2}{1}$)。換句話說，形心以 2:1 劃分中線。

示例 1

4. 丙部的建議答案：

(1) 證明三角形的形心以 2:1 劃分中線

方法 1

預備知識：相似三角的條件及其性質

	<p>主要步驟：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 構作中線 AD 及 CF 2. 構作 $DH \parallel BA$ 3. 證明 $CDH \sim CBF$ 4. 考慮 CDH 和 CBF，找出比 $BC:DC$ 和 $AF:HD$。 5. 證明 $DHG \sim AFG$ 及找出比 $AG:GD$。
--	---

方法 2

預備知識：相似及全等三角形的條件和相似三角形的性質

	<p>主要步驟：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 構作中線 AD 和 CF 2. 延長 CF 3. 構作 $BH \parallel AD$ 4. 證明 $BHF \cong AGF$ 5. 證明 $CDG \sim CBH$ 6. 找出比 $BH:DG$ 和 $AG:GD$
--	---

方法 3

預備知識：截線定理

	<p>主要步驟：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 構作中線 AD 和 CF 2. 構作 $DH \parallel CF$ 3. 考慮 BCF 和 BDH, 應用截線定理來證明 $BH=HF$ 4. 找出比 $AF:FH$ 5. 考慮 AHD 和 AFG, 應用截線定理得到比 $AG:GD$
--	---

方法 4

預備知識：中點定理和平行四邊形的性質

	<p>主要步驟：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 構作中線 AD 及 CF 2. 構作 AG 的中點 H 和 CG 的中點 J 以組成四邊形 DFGJ。 3. 先考慮 BFD, BAC, 跟著考慮 GJH 和 GCA, 應用中點定理證明 $JH=DF$ 和 $JH \parallel DF$。因此推出 $DFHJ$ 是一個平行四邊形。 4. 利用平行四邊形的性質, 找出比 $FG:GJ$, $CG:GF$ 和 $AG:GD$。
--	---

示例 1

(2) 證明中線是共點

預備知識：三角形面積，形心以 2:1 劃分中線，兩個等高三角形的面積比=該兩個三角形的底邊比

	<p>主要步驟：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 構作中線 BE 和 CF 2. 構作線 AD，它是通過 BE 和 CF 的相交點的。 3. 構作線 BH 和 CI 以致 $AD \parallel BH \parallel CI$。 4. 構作線 HI 以致 $HI \parallel AD$ 5. 證明 AFG 的面積= BFG 的面積 6. 證明 AEG 的面積= CEG 的面積 7. 應用 $BG:GE=CG:GF=2:1$，證明 AFG 的面積= AEG 的面積 8. 應用第 7 點的結果證明 $HJ=JI$ 9. 證明 BGD 的面積= CGD 的面積 10. 找出比 $BD:DC$，因此證明 AD 是三角形的中線
--	--

.....

參考資料：

網址：

1. <http://www.geom.umn.edu/~demo5337/Group2/trianglecenters.html>
2. <http://cedar.evansville.edu/~ck6/tcenters/index.html>
3. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/Geometry/eulerline.html>

書籍：

1. Perham, Arnold E., Perham, Bernadette H., Perham, Faustine L. (1997). "Creating a Learning Environment for Geometric Reasoning". *Mathematics Teacher*, 90(7) pp. 521-526. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
2. 中國教育學會主辦。《中小學數學 初中版》。1999 年第 7 – 8 期(頁八)。
3. Battista, Michael T. (1998). *Shape makers: developing geometric reasoning with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, California: Key Curriculum Press.
4. Dixon, Robert A. (1991). *Mathographics*. New York: Dover Publications.
5. Wyatt, Karen W., Lawrence, Ann and Foletta, Gina M. (1998). *Geometric activities for middle school students: with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, California: Key Curriculum Press.
6. Yerushalmy, Michal and Houde, Richard (1987). *Geometry problems and projects: triangles*. Pleasantville, New York: Sunburst Communications.