



示例 4：實驗概率和理論概率的意義

學習範疇：數據處理

學習單位：概率的簡單概念

學習階段：第三學習階段

所需教材：試算表軟件如微軟 *Excel* 程式及工作紙

預備知識：(1) 理論概率的意義
(2) 投擲三顆硬幣結果的樹形圖

主要特徵：

這活動的目的是讓學生透過對比理論概率來明白實驗概率的意義。藉著傳統“包、剪、鎚”遊戲，要求學生探究此遊戲的公平性問題。

在活動的甲部，學生須要嘗試進行遊戲數次；同時又透過電腦軟件試算表的幫助模擬出大量測試結果，以研究實驗概率的規律。

在活動的乙部，學生須要利用他們曾學過的樹形圖來探討理論概率。最後，要求學生比較實驗概率和理論概率。

所有學生均須參與活動甲、乙兩部分。在活動的乙部，教師可藉著運用不同工作紙以照顧不同學習能力的學生。工作紙的運用可參考下表：

| 部分 | | 能力稍遜學生 | 一般能力學生 | 能力較佳學生 |
|----|----------|--------|--------|--------|
| 甲 | 工作紙 4.1 | ✓ | ✓ | ✓ |
| 乙 | 工作紙 4.2A | ✓ | | |
| | 工作紙 4.2B | | ✓ | |
| | 工作紙 4.2C | | | ✓ |

註：✓ 表示學生在開始學習上述課題時可以進行的部分。

示例 4

在工作紙 4.2A 內，包含較多具有引導性及有組織性的題目予能力稍遜的學生，引導學生得出遊戲是公平的結論。在工作紙 4.2B 內，包含較少具有指引性或直接的題目以配合一般能力學生的需要。學生需要在進行遊戲時，解決有附加限制條件的問題，並須確定新遊戲是否公平。在工作紙 4.2C 中，能力較佳的學生須要自行分析問題及作出自己的論據。除此，他們須要研究在更複雜及加入更多附加條件的遊戲時的公平性問題。他們亦須進一步改變遊戲規則以令遊戲變得公平。

活動內容：



甲部：進行“包、剪、鎚”的遊戲。

遊戲的簡介：

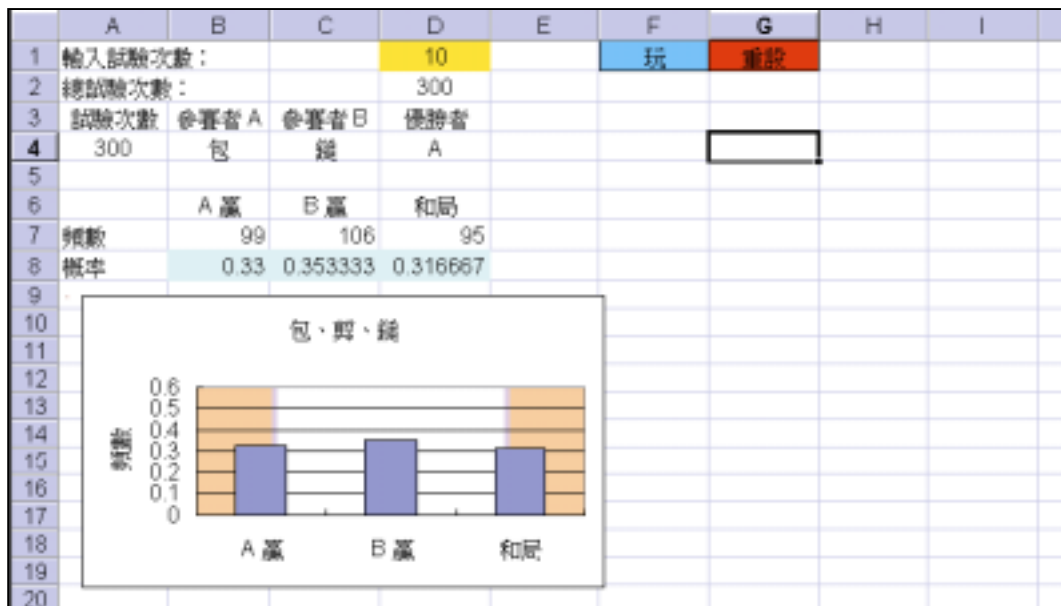
此遊戲是一兩人對奕的遊戲。每人利用其手形成“包”、“剪”或“鎚”的形狀。遊戲的規則是“包”勝過“鎚”，“剪”勝過“包”，“鎚”勝過“剪”。若兩人的手勢相同，則為和局。

1. 向學生簡介“包、剪、鎚”遊戲及討論遊戲公平性的意義，即兩位參賽者勝出的機會是否均等。
2. 要求學生從其以往經驗中估計參賽者甲或乙勝出的概率。若可能，尋求全班對此估計值的共識(很大可能得出各參賽者的勝出概率為 $\frac{1}{2}$)。
3. 要求學生進行遊戲數次以檢驗其公平性，步驟如下：
 - (a) 以兩人為一組將學生分組，一為參賽者甲，另一為乙；
 - (b) 著學生進行遊戲 10 次，並將結果記錄在工作紙 4.1 的表 4.1 中。
4. 要求某些組別學生匯報其結果並引導學生發現相異組別的參賽者甲(或乙)勝出的概率可以有很大的分別。
5. 引導學生觀察當收集所有學生數據組成的大量測試結果時的現象。教師可考慮運用試算表來計算甲或乙勝出或和局的概率，並向全班展示數據的分佈情況。

6. 如有需要，在討論中可提出下列問題：

- (a) 在每組(10次試驗)進行遊戲後，甲、乙勝出的概率有甚麼分別？為何兩參賽者勝出的概率並非與所期望的數值一樣(參考上述點 2 的討論)？若參賽者甲有較佳的勝出率，是否甲利用詭計以至取勝？為什麼？
- (b) 計算全班總嘗試次數後，甲、乙勝出的概率有何分別？
- (c) 比較上述(a)及(b)的答案，你能解釋這現象嗎？
- (d) 兩位參賽者勝出的百分比與試驗次數有沒有關係呢？
- (e) 當試驗次數很大時，各百分比將會如何？二百次的試驗(即全班試驗的總次數)足夠大嗎？

7. 分派試算表程式 SPR_C.xls 予學生，以模擬出大量試驗。學生雖然可隨便模擬出任何次數的試驗，但最好是嘗試較大次數的試驗(在此提議每次試驗次數最多為 10 000 次；否則，須要超過三分鐘去進行模擬)。學生須要將甲勝出、乙勝出或和局的結果百分比及每次試驗的數目記錄在工作紙 4.1 的表 4.2 中。



示例 4

.....

8. 要求學生匯報其結果及討論當試驗次數增加時，上述三件事件的趨勢。
9. 幫助學生綜合以下結論：
 - (a) 甲(或乙)在嘗試 10 次, 200 次甚至更多次數試驗時勝出的百分比為甲(或乙)勝出的實驗概率；
 - (b) 在進行每次遊戲時實驗概率未必相同；
 - (c) 但是當試驗次數愈發增大時，實驗概率將趨向某一數值(可能是上述點 2 的估計值)；
 - (d) 當兩參賽者自由運用“包”、“剪”及“鎚”時，此遊戲對甲及乙來說都是公平。
10. 若教師發現上述點 2 的估計值與大量試驗後的實驗概率存在差異時，應帶領學生進入活動的乙部以找出有關的理論概率。若不存在差異，學生可透過乙部的提示去證實其估計。

工作紙 4.1 進行遊戲“包、剪、鎚”

假設你是參賽者甲而你的對手是參賽者乙。現在與你的對手進行 10 次“包、剪、鎚”遊戲。將結果記錄於表 4.1 內。請在適當地地方加“✓”，算出各項的總數及對應的百分比。

| 回合 | 甲勝出 | 乙勝出 | 和局 |
|-----|-----|-----|----|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 總數 | | | |
| 百分比 | | | |

表 4.1

現在開啟試算表檔案 SPR_c.xls。以不同試驗次數執行“包、剪、鎚”的遊戲。將結果記錄於表 4.2 內。

| 試驗 次數 | 甲勝出 | | 乙勝出 | | 和局 | |
|----------|-----|---|-----|---|----|---|
| | 數目 | % | 數目 | % | 數目 | % |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

表 4.2

示例 4



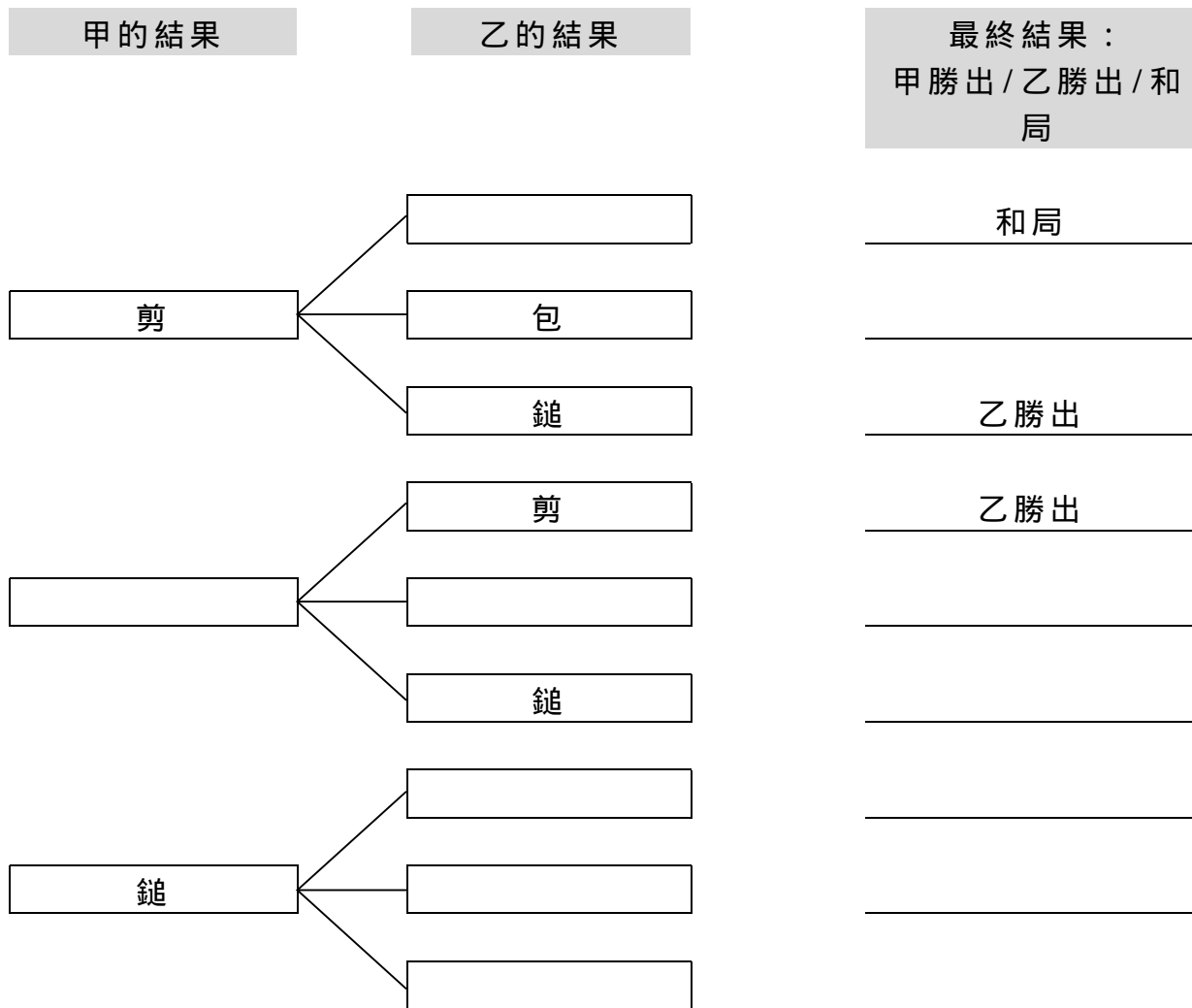
乙部：對遊戲進行分析

1. 與學生簡略地溫習如何以樹形圖表達出可能結果。
2. 將能力相近的學生以四至五人為一組分組。
3. 將工作紙 4.2A, 4.2B 及 4.2C 分別派予能力稍遜學生的組別, 一般能力學生的組別及能力較佳學生的組別。並要求他們討論表達兩參賽者“包、剪、鎚”遊戲結果的樹形圖。
4. 要求學生完成工作紙 4.2A 或 4.2B 的問題 1 及 2 或工作紙 4.2C 的問題 1。不同工作紙上的不同提示能引導對應能力的學生解決問題。例如, 在工作紙 4.2A 中, 每分支中空格要填寫的答案可以成為能力稍遜學生的提示, 而不完整的樹形圖, 如刪減了某些分支的題目可以給予該組學生中那些能力略好的學生去完成。
5. 對於一般能力或能力較佳學生, 若他們已完成工作紙的首部分, 他們可以分別直接進入工作紙 4.2B 的問題 3 或工作紙 4.2C 中的問題 2。教師可透過回答各組學生問題時給予個別學生支援, 或可要求每組組員在研討不同情況下遊戲的公平性時協助其他組員。
6. 隨意選取每組一個學生, 讓他/她在全班報告其組別所繪的樹形圖。另一學生(很可能是能力較佳學生)可被邀請去展示他/她組別對於自由運用“包”、“剪”及“鎚”情況下遊戲的公平性。他/她須要以理由解釋他們的猜想。教師須將學生的理據與工作紙 4.2A 或工作紙 4.2B 的問題 2 聯繫起來。
7. 向學生介紹名詞“理論概率”並與學生比較在甲部點 2 中猜想的概率。然後, 教師與學生討論實驗概率和理論概率的分別。

-
8. 分派工作紙 4.2B 問題 3 或工作紙 4.2C 問題 2 的答案予對應組別讓他們核對其答案。
 9. 上述點 1 至 8 的活動目標是針對照顧一班能力混合的學生。對於全班學生均為能力較佳者，教師可考慮只分派工作紙 4.2C 予學生。隨後教師應與學生詳細討論工作紙 4.2C 中各問題的解釋，特別是難度較高的問題。

工作紙 4.2A

1. 填寫下列“包、剪、鎚”遊戲的樹形圖。



2. 利用上述樹形圖解答下列問題。
- 此遊戲共有多少個可能結果？
 - 算出甲勝出的數目。
 - 由(b)，求甲在任一回合上勝出的概率。
 - 算出乙勝出的數目。
 - 由(d)，求乙在任一回合上勝出的概率。
 - 算出和局的數目。
 - 由(f)，求在任一回合上和局的概率。

工作紙 4.2C

1. 利用樹形圖分析“包、剪、鎚”遊戲是否公平。請寫下你的理由。

2. 回答下列問題。

(a) 若一參賽者只選用“包”及“鎚”，各概率將會有甚麼轉變？試簡略說明。

(b) 假設現在有三位學生進行“包、剪、鎚”遊戲。規則如下：

(i) 若三隻手的結果相同，則甲勝出。

(ii) 若三隻手的結果完全不同，則乙勝出。

(iii) 若只有兩隻手的結果相同，則丙勝出。

此遊戲是否公平？請給出理由。

(c) 可否將(b)部分的遊戲規則修改令到遊戲變為公平？若可以，寫下修改後的規則。

教師注意事項：

工作紙 4.2A 的答案：

1. 遊戲結果表列如下。

| 情況 | 甲的結果 | 乙的結果 | 最終結果 |
|----|------|------|------|
| 1 | 剪 | 剪 | 和局 |
| 2 | 剪 | 包 | 甲勝出 |
| 3 | 剪 | 鎚 | 乙勝出 |
| 4 | 包 | 剪 | 乙勝出 |
| 5 | 包 | 包 | 和局 |
| 6 | 包 | 鎚 | 甲勝出 |
| 7 | 鎚 | 剪 | 甲勝出 |
| 8 | 鎚 | 包 | 乙勝出 |
| 9 | 鎚 | 鎚 | 和局 |

2.

- (a) 9 (b) 3 (c) $\frac{1}{3}$
- (d) 3 (e) $\frac{1}{3}$ (f) 3
- (g) $\frac{1}{3}$

工作紙 4.2B 的答案：

1. 與工作紙 4.2A 問題 1 的答案相同。

2. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$

3. 假設參賽者乙只選用“包”及“鎚”。此遊戲的結果表列如下 (刪除工作紙 4.2A 問題的答案內情況 1,4 及 7)：

| 情況 | 甲的結果 | 乙的結果 | 最終結果 |
|----|------|------|------|
| 1 | 剪 | 包 | 甲勝出 |
| 2 | 剪 | 鎚 | 乙勝出 |
| 3 | 包 | 包 | 和局 |
| 4 | 包 | 鎚 | 甲勝出 |
| 5 | 鎚 | 包 | 乙勝出 |
| 6 | 鎚 | 鎚 | 和局 |

示例 4

從上表中可得知甲勝出、乙勝出及和局的概率均為 $\frac{1}{3}$ 。故此，這是一個公平的遊戲。注意在新規則下甲的結果是隨意的。其實，已知參賽者乙只用“包”及“鎚”，在此情況下甲不可能利用“鎚”來勝過參賽者乙的“剪”。由此若甲改變其策略為只運用“剪”及“包”，則甲勝出的概率則改變為 $\frac{1}{2}$ 而乙勝出的概率為 $\frac{1}{4}$ （刪除上述表中的情況 5 及 6）。

工作紙 4.2C 的答案：

1. 與工作紙 4.2B 問題 1 及 2 的答案相同。
2. (a) 與工作紙 4.2B 問題 3 的答案相同。
- (b) 所有可能的 27 種結果表列如下：

| 情況 | 甲的結果 | 乙的結果 | 兩的結果 | 最終結果 |
|----|------|------|------|------|
| 1 | 剪 | 剪 | 剪 | 甲勝出 |
| 2 | 剪 | 剪 | 包 | 丙勝出 |
| 3 | 剪 | 剪 | 鎚 | 丙勝出 |
| 4 | 剪 | 包 | 剪 | 丙勝出 |
| 5 | 剪 | 包 | 包 | 丙勝出 |
| 6 | 剪 | 包 | 鎚 | 乙勝出 |
| 7 | 剪 | 鎚 | 剪 | 丙勝出 |
| 8 | 剪 | 鎚 | 包 | 乙勝出 |
| 9 | 剪 | 鎚 | 鎚 | 丙勝出 |
| 10 | 包 | 剪 | 剪 | 丙勝出 |
| 11 | 包 | 剪 | 包 | 丙勝出 |
| 12 | 包 | 剪 | 鎚 | 乙勝出 |
| 13 | 包 | 包 | 剪 | 丙勝出 |
| 14 | 包 | 包 | 包 | 甲勝出 |
| 15 | 包 | 包 | 鎚 | 丙勝出 |
| 16 | 包 | 鎚 | 剪 | 乙勝出 |
| 17 | 包 | 鎚 | 包 | 丙勝出 |
| 18 | 包 | 鎚 | 鎚 | 丙勝出 |
| 19 | 鎚 | 剪 | 剪 | 丙勝出 |

| | | | | |
|----|---|---|---|-----|
| 20 | 鎚 | 剪 | 包 | 乙勝出 |
| 21 | 鎚 | 剪 | 鎚 | 丙勝出 |
| 22 | 鎚 | 包 | 剪 | 乙勝出 |
| 23 | 鎚 | 包 | 包 | 丙勝出 |
| 24 | 鎚 | 包 | 鎚 | 丙勝出 |
| 25 | 鎚 | 鎚 | 剪 | 丙勝出 |
| 26 | 鎚 | 鎚 | 包 | 丙勝出 |
| 27 | 鎚 | 鎚 | 鎚 | 甲勝出 |

從上表中可知甲勝出的概率 = $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ 。乙勝出的概率 = $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ 。丙勝出的概率 = $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ 。

- (c) 其中一種修改方法是：如果一參賽者的結果勝過其他參賽者時則該參賽者勝出，否則為和局。