



示例 7：利用資訊科技按正方形的性質去繪畫正方形

學習範疇：度量、圖形與空間

學習單位：四邊形

學習階段：第三學習階段

所需教材：互動幾何軟件，例如 *Geometer's Sketchpad* (簡稱 *Sketchpad*)

- 預備知識：
- (1) 特殊四邊形的性質如平行四邊形、長方形、正方形、菱形、鳶形及梯形
 - (2) 變換的基本概念如平移、反射及旋轉
 - (3) 資訊科技作幾何圖形的基本技巧

主要特徵：

這示例包括兩部分。每部分均在基礎部分的課程中，及以同一軟件的不同內置功能構作正方形，以照顧不同學習能力的學生。

部分	活動	能力稍遜的學生	一般能力的學生	能力較高的學生
甲	(I) 複習	✓	✓	
	(II) 繪圖示範	✓	✓	✓
乙	(I) 依據指示，構作正方形	✓	✓	
	(II) 探索一個構作正方形的方法		✓	
	(III) 自由構作正方形			✓

備註：✓表示學生在開始學習有關課題時可以進行的部分。

示例 7

甲部：

甲部(I)為鞏固性活動，以幫助學生複習四邊形的性質。甲部(II)為繪圖示範，教師利用電腦軟件 *Sketchpad* 向學生展示構作正方形的方法。

乙部：

本部分包含三個活動。利用電腦軟件的幫助，要求學生用其他方法去構作正方形，及探究製作這圖形的最少步驟。

在活動一中，教師給予學生指引以構作正方形。

活動二要求學生探究用另外一種構作方法，而這部分對能力稍遜的學生會有一定的困難，故不推薦他們參與這活動。

活動三則要求學生利用正方形的特性，在沒有指引下找出不同的方法製作正方形。是項活動的難度相對較高，並要求學生對他們的發現給予演繹證明。

活動三內亦載有一道挑戰題，供學生作進一步探究用。

活動內容：



甲部：

(I) 複習四邊形的性質

1. 分發工作紙 7.1A 或 7.1B 分別予能力稍遜或一般能力的學生，並要求他們配對四邊形及其性質。
2. 與學生核對答案及討論以下問題：
 - (a) 哪種四邊形有平行四邊形的性質？
 - (b) 哪種四邊形有長方形的性質？
 - (c) 哪種四邊形有菱形的性質？
3. 要求學生按自己的標準將四邊形分類。
4. 邀請學生展示他們的分類，容許學生對他們的分類標準作辯論。例如：部分學生對於菱形是否鳶形這個問題上可能有不同的意見。
5. 教師利用溫氏圖去說明及總括分類。
6. 在作總結時，教師可進一步討論應用正方形的性質去構作一個正方形的最少條件。

工作紙 7.1A : 四邊形的性質

對應各種性質，配對四邊形，在適當的方格上加上✓號。

性質	平行四邊形	長方形	正方形	菱形	鳶形	梯形
1. 四個直角						
2. 對角相等						
3. 鄰角互補						
4. 四邊相等						
5. 兩對鄰邊相等						
6. 對邊相等						
7. 對邊平行						
8. 一對平行邊						
9. 對角線相等						
10. 對角線互相垂直						
11. 對角線互相平分						

工作紙 7.1B : 四邊形的性質

就邊、角與對角線的關係(例如它們的大小是否互相平分等),寫下各四邊形的性質。

1. 平行四邊形

邊	
角	
對角線	

2. 長方形

邊	
角	
對角線	

3. 正方形

邊	
角	
對角線	

4. 菱形

邊	
角	
對角線	

5. 鳶形

邊	
角	
對角線	

6. 梯形

邊	
角	
對角線	

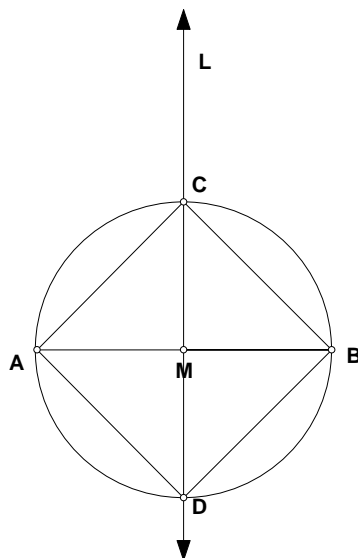
示例 7

(II) 構作正方形(教師示範)

1. 向學生介紹活動，並複習一些基本電腦幾何繪圖技巧，例如，繪畫平行線、垂直線、圓等。
2. 教師示範構作正方形的兩個方法。

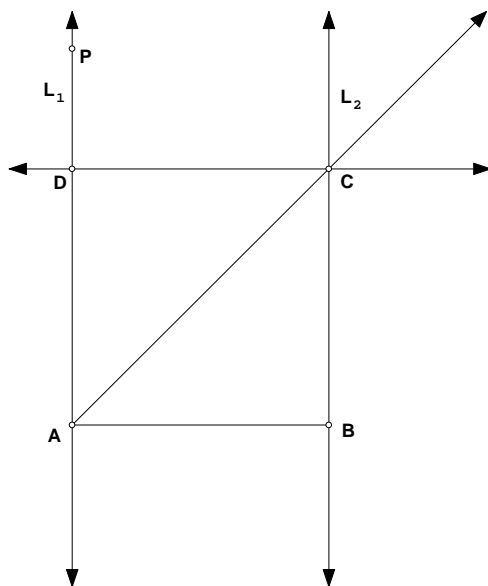
方法 1：

- (i) 作一線段 AB 及刻上中點 M 。
- (ii) 以 M 為圓心， AM 為半徑，繪畫一以線段 AB 為直徑的圓形。
- (iii) 經過點 M ，作一垂直於 AB 的垂線 L 。
- (iv) 以 C 和 D 標示線 L 和圓的相交點。
- (v) 將圓上的四點 A, B, C 與 D 相連，便可得到一個四邊形。



方法 2：

- (i) 作一線段 AB 。
- (ii) 於端點 A 和 B 上，分別作垂直於 AB 的垂線 L_1 和 L_2 。
- (iii) 於 L_1 上刻上點 P 。
- (iv) 作一平分 $\angle PAB$ 的線。此線將與 L_2 相交於點 C 。
- (v) 經過 C ，作一垂直於 L_2 的垂線。這線將與 L_1 相交於點 D 。這樣，便可形成正方形 $ABCD$ 。



3. 要求學生判斷圖形 $ABCD$ 是否正方形，並說出理由。
4. 引導學生觀察在構作正方形的過程中，無須全部採用正方形的性質，從而討論正方形的判定條件。



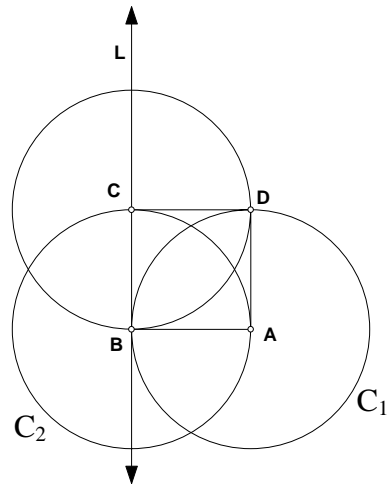
乙部：構作正方形

(I) 給予所有學生的活動

1. 選擇以下其中兩個方法，要求學生依據指定步驟構作正方形。

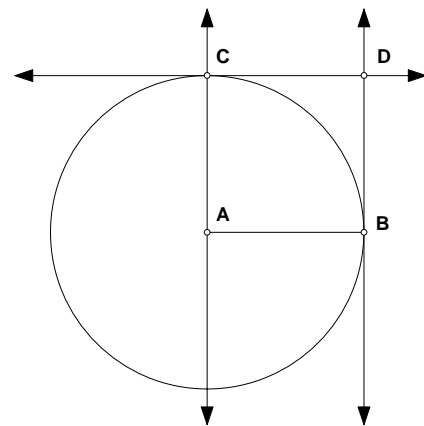
方法 3：

- (i) 作一線段 BA 。
- (ii) 分別以 A 和 B 為圓心， BA 為半徑，作圓 C_1 和 C_2 。
- (iii) 於點 B ，作一垂直於 BA 的垂線 L 。
- (iv) 以 C 標示線 L 與圓 C_2 的相交點。
- (v) 以 C 為圓心， BA 為半徑，作一圓。
- (vi) 這圓將會相交圓 C_1 於點 D ，這樣， $ABCD$ 便成一正方形。



方法 4：

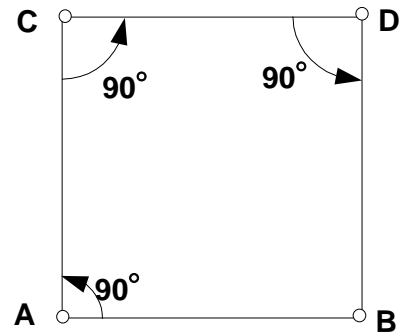
- (i) 作一線段 BA 。
- (ii) 以 A 為圓心， AB 為半徑，作一圓。
- (iii) 經過點 A ，作一垂線，垂直 AB 。
- (iv) 以 C 標示圓與垂線的相交點。
- (v) 經過點 C ，作一線平行 AB 。
- (vi) 經過點 B ，作一線平行 AC 。
- (vii) 於步驟 (v) 與 (vi) 所得的線相交於點 D ，這樣， $ABDC$ 便成一正方形。



示例 7

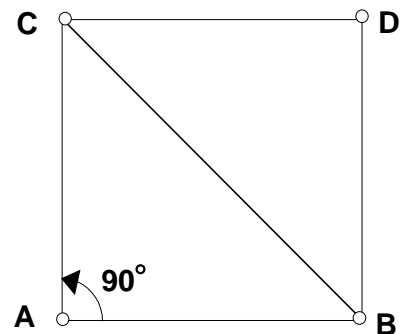
方法 5 :

- (i) 作一線段 AB。
- (ii) 以點 A 作旋轉中心，將 AB 繞中心點逆時針轉 90° 。
- (iii) 將點 B 的影像標示為 C。
- (iv) 以點 C 作旋轉中心，將 AC 繞中心點逆時針轉 90° 。
- (v) 將點 C 的影像標示為 D。
- (vi) 以點 D 作旋轉中心，將 CD 繞中心點逆時針轉 90° ，這樣，ABDC 便成一正方形。



方法 6 :

- (i) 作一線段 AB。
- (ii) 以點 A 作旋轉中心，將 AB 繞中心點逆時針轉 90° 。
- (iii) 將點 B 的影像標示為 C。
- (iv) 作一線段 BC。
- (v) 將點 A 沿著線段 BC 反射。
- (vi) 標示 A 的影像為 D，這樣，ABDC 便成一正方形。



2. 與學生討論哪個方法構作正方形最有效 (即哪個方法使用最少的步驟)。
3. 與學生討論在構作過程中，採用了正方形那些特性。著學生完成工作紙 7.2A。

.....

(II) 給予一般能力學生的活動

1. 要求學生用自己的方法構作正方形。
2. 邀請學生展示他們的發現。
3. 與學生討論他們所得的四邊形是否正方形，及其理由。

(III) 給予較高能力的學生的活動

1. 要求學生探究以不同方法構作正方形。
2. 派發工作紙 7.2B。著學生記錄各個方法的步驟及在構作過程中，使用了那些正方形的性質。
3. 邀請學生展示他們的發現。
4. 與學生討論那個方法最有效及所得的圖形是否正方形。
5. 教師可向學生提出以下挑戰題：
因正方形亦是長方形，你能否以一個長方形開始去構作一個正方形呢？如何得之？要求學生用文字解釋以支持他們的作圖方法。

工作紙 7.2A：在各構作過程中，辨認使用了那些正方形的性質。

完成下表。

方法	正方形性質	備註
1		甲(II) 教師的示範部分
2		
3		指導作圖
4		
5		
6		

工作紙 7.2B：構作正方形

就每個構作正方形的方法，記錄其步驟並指出使用了那些正方形的性質。

方法 1：

性質：

方法 2：

性質：

示例 7

工作紙 7.2B

方法 3 :

性質 :

方法 4 :

性質 :

教師注意事項：

甲部：

1. 六種特殊四邊形的性質

性質	平行四邊形	長方形	正方形	菱形	鳶形	梯形
1. 四個直角		✓	✓			
2. 對角相等	✓	✓	✓	✓		
3. 鄰角互補	✓	✓	✓	✓		
4. 四邊相等			✓	✓		
5. 兩對鄰邊相等					✓	
6. 對邊相等	✓	✓	✓	✓		
7. 對邊平行	✓	✓	✓	✓		
8. 一對平行邊						✓
9. 對角線相等		✓	✓			
10. 對角線互相垂直			✓	✓	✓	
11. 對角線互相平分	✓	✓	✓	✓		

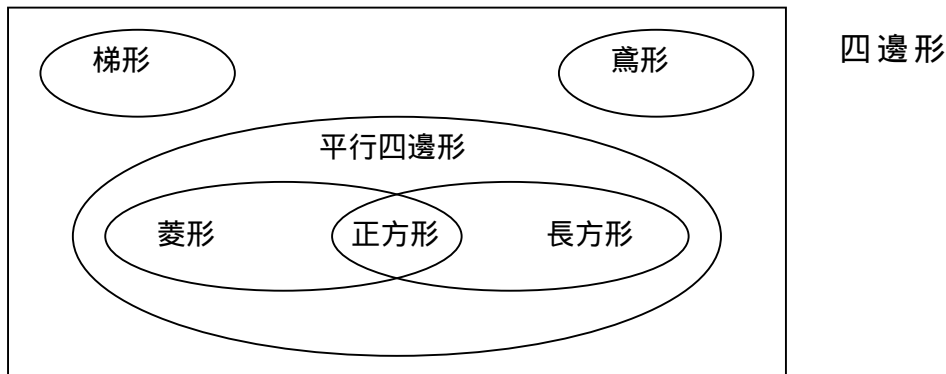
2. (a) 正方形、菱形與長方形是平行四邊形。

(b) 正方形有長方形的性質。

(c) 正方形有菱形的性質。

示例 7

3. 以溫氏圖展示四邊形的分類，如下：



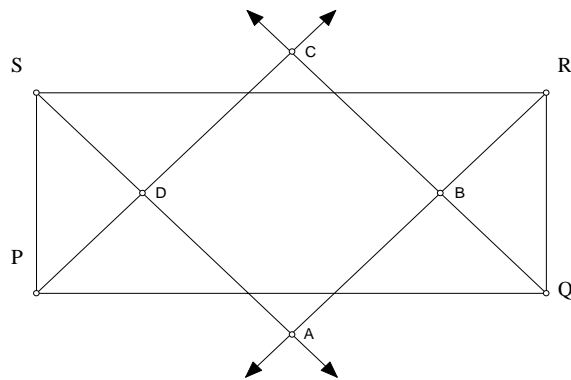
4. 教師可分別使用隨附光碟內的 *Sketchpad* 檔案 Method1.gss 及 Method2.gss 示範 1 及 2 的構作方法。

乙部：

1. 在各建議構作正方形的方法中，使用有關正方形的性質表列如下：

方法	正方形性質	備註
1.	兩條對角線相等，互相垂直及平分。	首四種方法展示如何使用圓規和直尺構作正方形。
2.	兩隻直角及對角線平分對角。	
3.	四邊相等及一隻直角。	
4.	對邊平行及鄰邊相等且互相垂直。	
5.	四隻直角及四邊相等。	最後兩種方法展示了利用正方形具有反射及旋轉對稱性質，從而以變換方法作圖。
6.	兩條等邊及夾角為直角，對角線為反射對稱軸。	

-
- 長方形的四條角平分線的交點可構成一個正方形，如下圖所示，ABCD 是一個正方形。學生或許沒有考慮以這個方向作圖，教師可以給予學生適當提示如在長方形內作角平分線等。
 - 教師可使用隨附光碟內的 *Sketchpad* 檔案 Method3.gss, Method4.gss, Method5.gss 及 Method6.gss 分別示範構作方法 3 至 6；或者，教師亦可按下頁提供的製作方法自行構作有關圖形。
 - 教師可要求較高能力的學生給出一個演繹證明。






證明：因為 $\angle PSD = \angle DPS = 45^\circ$
 $\angle PDS = 90^\circ$ (三角形內角和)
 $\angle ADC = 90^\circ$ (對頂角)
 同樣地， $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$
 進一步更可證明 $\triangle SPD \cong \triangle QRB$ 。(A.S.A.)
 $PD = DS = BR = BQ$ (*) (全等三角形的對應邊)
 因為 $\angle CPQ = \angle CQP$, $PC = CQ$ (**) (底角相等)
 所以 $CD = BC$ (由*及**)
 因此 ABCD 是正方形。

示例 7

建議作圖的操作程序 (以 *Sketchpad 3.0* 版為背景) :

方法 1

1. 點按 **Segment** 按鈕  並拖曳，繪畫一水平線段。
2. 點按 **Label** 按鈕  和標示線段的端點為 A 與 B。
3. 選取線段 AB。點按 **Construct** 按鈕和選擇 **Point At Midpoint**。
4. 點按 **Label** 按鈕和標示中間點。連續點按兩下標示，便可更改名稱為 M。
5. 點按 **Selection Arrow** 按鈕  並同時按下鍵盤上的 **Shift** 鍵，選擇點 A 和 M。點按 **Construct** 按鈕和選擇 **Circle By Centre And Point**。
6. 按下 **Shift** 鍵，選擇點 M 和線段 AB。點按 **Construct** 按鈕和選擇 **Perpendicular Line** 作一直線，經過點 M 及垂直 AB。
7. 點按 **Label** 按鈕和以 L 標示直線。
8. 點按 **Selection Arrow** 按鈕，並同時按下 **Shift** 鍵，選取圓和線 L。點按 **Construct** 按鈕和選擇 **Point At Intersection**。
9. 點按 **Label** 按鈕，以 C 和 D 標示相交點。
10. 點按 **Selection Arrow** 按鈕，並同時按下 **Shift** 鍵，選擇點 A, B, C 和 D。按 **Construct** 按鈕和選擇 **Segment**。便形成正方形 ADBC。

方法 2

1. 重複方法 1 之步驟 1 和 2。
2. 點按 **Selection Arrow** 按鈕，並同時按下 **Shift** 鍵，選擇點 A 和線段 AB。點按 **Construct** 按鈕，選擇 **Perpendicular Line**，作一直線經過點 A 並垂直 AB。
3. 按下 **Shift** 鍵，選擇點 B 和線段 AB。點按 **Construct** 按鈕和選擇 **Perpendicular Line**，作一直線經過點 B 並垂直 AB。

-
4. 點按 **Label** 按鈕，以 L_1 和 L_2 標示分別位於點 A 和 B 的垂直線。
 5. 點按 **Point** 按鈕，標記一點於 L_1 上，並以 P 標示。
 6. 點按 **Selection Arrow** 按鈕，並同時按下 **Shift** 鍵，選擇點 P, A 和 B。點按 **Construct** 按鈕和選擇 **Angle Bisector**。
 7. 按下 **Shift** 鍵，選擇角平分線和 L_2 。按 **Construct** 按鈕和選擇 **Point At Intersection**
 8. 以 C 標示相交點。
 9. 點按 **Selection Arrow** 按鈕，並按下 **Shift** 鍵，選擇點 C 和 L_2 。按 **Construct** 按鈕和選擇垂直線。
 10. 標記步驟 9 所得的線和 L_1 的相交點。
 11. 以 D 標示此相交點。正方形 ABCD 便形成。

其他有關方法 3 至 6 的作圖程序：

- (I) *以點 A 為圓心，AB 為半徑作一個圓*
點按 **Selection Arrow** 按鈕，並按下 **Shift** 鍵，選擇點 A 和 B。按 **Construct** 按鈕和選擇 **Circle By Centre And Point**。
- (II) *把線段 AB 以 A 為中心點旋轉 90 度*
 1. 點按 **Selection Arrow** 按鈕，選擇點 A。按 **Transform** 按鈕和選擇 **Mark Centre**，這樣點 A 便成為旋轉中心點。
 2. 按下 **Shift** 鍵，選擇線段 AB 和點 B，按 **Transform** 按鈕和選擇 **Rotate**，在視窗方格中輸入 90° 並按 OK。
- (III) *點 A 沿線段 BC 反射*
 1. 點按 **Selection Arrow** 按鈕，選擇線段 BC，按 **Transform** 按鈕和選擇 **Mark Mirror**，這樣線段 BC 便為反射軸。
 2. 選擇點 A，按 **Transform** 按鈕和選擇 **Reflect**。這樣，便產生點 A 的影像。