



示例 8：探究構作密鋪圖形的方法

學習範疇： 度量、圖形與空間

學習單位： 與線及直線圖形有關的角

學習階段： 第三學習階段

- 所需教材：
- (1) 用半透明膠片製作的正多邊形。
 - (2) 供學生連接互聯網的設備。
 - (3) 軟件如 *小畫家*(視窗 NT4.0 或以上)和 *Geometer's Sketchpad* (簡稱 *Sketchpad*)。
 - (4) 正多邊形資料表(見表 1)。
 - (5) 用 *小畫家*透過平移的技巧創製一個密鋪圖形的指示(參看附件 I)。
 - (6) 用 *Sketchpad*透過平移、反射及旋轉創作一個密鋪圖形的提示(參看附件 II 至 IV)。

- 預備知識：
- (1) 簡單變換概念，包括平移、反射及旋轉
 - (2) 正多邊形內角和

主要特徵：

本示例活動的目標是讓學生明白密鋪平面的概念以及建立對線、面、角和多邊形性質的了解。本示例包含 3 部分，教師可如下表安排不同活動給予不同能力的學生參加：

部分		能力稍遜學生	一般能力學生	能力較高學生
甲	正多邊形	✓	✓	✓
	其他多邊形	✓	✓	✓
乙	電腦設計		✓	✓
丙	專題習作			✓

註：✓ 表示學生在開始學習上述課題時可以進行的部分。

示例 8

.....

在甲部，學生須：

- 識別可密鋪平面的正多邊形類型，
- 探究那些多邊形可以密鋪平面。

在乙部，要求學生：

- 在教師指導下，利用電腦和平移技巧創作一個簡單的密鋪圖形。

在丙部，學生需要構作一個密鋪圖形以作為小組專題習作。學生應使用軟件 *Sketchpad* 和利用多於一種變換來製作圖形，並須在班中匯報他們的設計。在組匯報時，教師可邀請其他組別中能力較佳的學生，猜測這圖形究竟應用了那些變換。

活動內容：



甲部：

1. 向學生展示下列網址以探討不同的密鋪圖形及介紹密鋪平面的概念。
<http://forum.swarthmore.edu/alejandre/students.tess.html>
 (這個由其他國家學生所製作的優秀密鋪圖形的網頁)
<http://www18.big.or.jp/~mnaka/home.index.html>
 (這網頁包含有趣的密鋪圖形並有動畫效果)
2. 將學生分成兩人一組並要求他們利用不同類型半透明膠片造成的正多邊形來密鋪平面。

正多邊形資料表			
正多邊形	邊數(n)	每個內角($\frac{180^\circ(n-2)}{n}$)	密鋪平面? (是 / 否)
等邊三角形			
正方形			
正五邊形			
正六邊形			
正七邊形			
正八邊形			

-
3. 要求學生計算出正多邊形的邊數及每個內角的角度。將記錄寫在下表內。
 4. 要求學生解釋他們在上表所得的發現。確保學生發現只有三類的正多邊形可密鋪平面，分別為等邊三角形、正方形和正六邊形。
 5. 讓學生集中注意這些圖形的內角，並引導他們解釋所得的發現。提問以下問題以引發討論：
 - (a) 可密鋪平面的正多邊形的內角分別是多少？
 - (b) 為何只有這三個正多邊形能夠密鋪平面？
 - (c) 為何正五邊形不能密鋪平面？
 6. 挑戰學生進一步探討那些簡單不規則多邊形能夠密鋪平面。學生可透過摺紙或其他方法，剪裁出不同形狀的多邊形來測試以下的猜想。每一組須進行以下其中一項的實驗：
 - (a) 嘗試不同類形的三角形來密鋪平面及討論“所有三角形都可密鋪平面”這一猜想。
 - (b) 嘗試不同類形的四邊形(可選取不是凸四邊形)。討論“所有四邊形都能密鋪平面”這一猜想是否正確。
 - (c) 嘗試其他不同類形的多邊形，挑戰學生探討“所有多邊形都能密鋪平面”這一猜想是否正確。
 7. 將學生的作品展示在黑板上，或用投影機投射出來。引導學生肯定只有(a)和(b)的猜想是正確的。



乙部：

1. 向學生展示一個長方形及示範如何只以平移的方法來變換圖形的形狀。跟著使用電腦軟件(例如小畫家)將這已改變形狀的圖形來密鋪平面。
2. 要求學生用相似的方法來變換正方形的形狀。他們可使用小畫家或 Sketchpad 來製作密鋪圖形(參看附件 I 至 IV)。圖 2 及圖 3 均是示例。

.....

使用小畫家通過平移製作的密鋪圖形



圖 2

使用 Sketchpad 通過平移製作的密鋪圖形

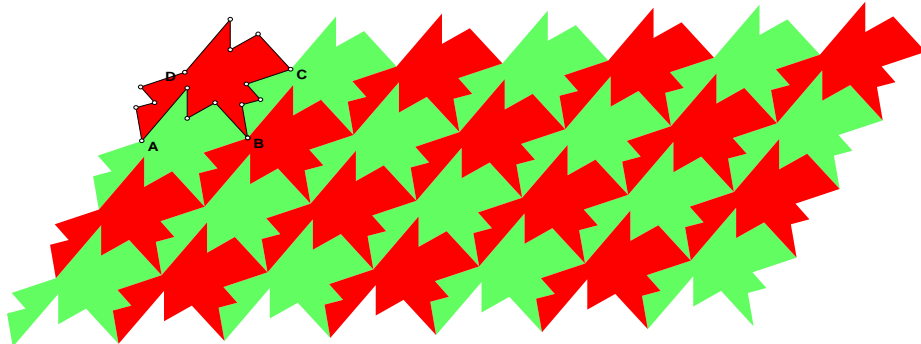


圖 3

3. 對於學習能力較佳的學生，建議他們使用 *Sketchpad* 來製作密鋪圖形，因為它能幫助學生運用變換的技巧，而且相對 *小畫家* 來說，它更具彈性及功能更強大。
4. 對於學習能力一般的學生，他們可使用 *小畫家* 來製作密鋪平面，因它較容易學習，而且在製作過程上不需要涉及太多變換技巧。



丙部：

1. 教師示範如何透過變換一個多邊形，包括反射和旋轉，來製作密鋪圖形。

使用 Sketchpad 透過反射和旋轉來製作的密鋪圖形

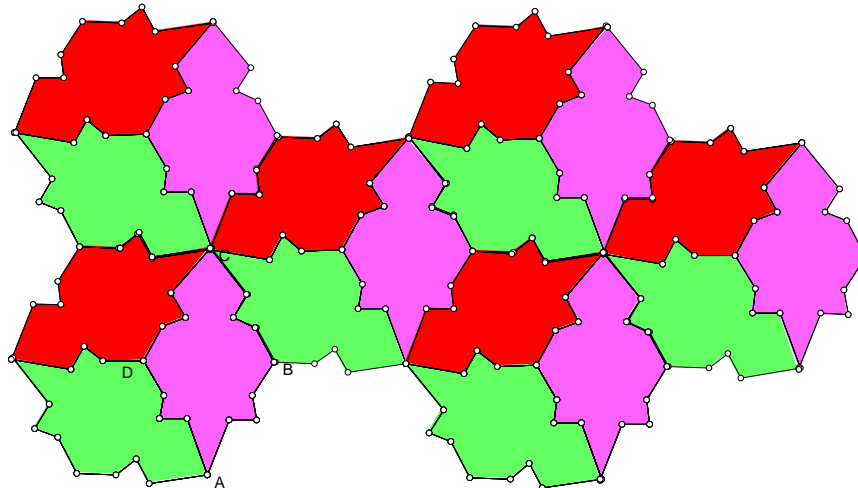


圖 4

2. 要求學生使用多於一種的變換來設計一個密鋪圖形的專題習作。學生須決定利用哪個多邊形(例如三角形、正方形、長方形或六邊形)來開始及應用哪些變換(平移、反射和旋轉)。
3. 給予學生提示如何以 Sketchpad 運用平移、反射和旋轉某一圖形來製作密鋪平面。
4. 清楚解釋專題習作的要求、報告須包括的項目及遞交的最後日期。報告可包括的項目建議如下：
 - (a) 列出所使用的軟件及引用的網址；
 - (b) 顯示每一步的建構步驟及所使用的變換技巧；
 - (c) 列印所創作的密鋪圖形。
5. 收集專題習作後，展示一些優異的作品。
6. 邀請學生在堂上匯報他們的設計意念及所使用的技巧。教師亦可邀請學習能力較佳的學生猜測圖形所涉及的變換技巧，作為遊戲。

.....

附件 I

使用 *小畫家* 透過 平移 來製作密鋪圖形的指引

開始之前：

1. 開啟該應用程式，跟著選擇影像/屬性這一項。在單位一欄上點選英吋。
2. 將寬度及高度分別定為 8.5 及 11。這一設定可提供足夠的空間製作密鋪圖形。



步驟 1

選擇喜愛的顏色，用矩形工具繪畫一個正方形(繪畫時，須按下 **Shift** 鍵)。由於 *小畫家* 中，利用矩形工具只會繪畫出正方形的外框，所以必須要使用填入色彩工具令正方形成為一個實心正方形。當你進行這個活動時，要經常儲存你的工作。將你的作品儲存成 256 色點陣圖(BMP)檔案。



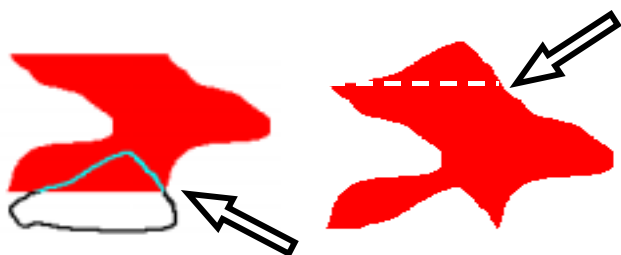
步驟 2

使用選擇任意範圍工具裁剪你喜愛的形狀。當完成一個圈後，可放開滑鼠鍵。此時你會看到一個由虛線組成的長方形，表示這長方形已被揀選。將這被揀選部分從正方形中拖曳出來。被揀選的部分會移到正方形的右面，下一步驟會展示出來。



步驟 3

將這揀選部分小心地放在正方形的右面。



步驟 4

由正方形下方其中一個角開始，重複以上過程。利用這個角的位置作為一個參考點，將這部分放在圖形的上方。



步驟 5

利用鉛筆和直線工具來粉飾這圖形。不要在圖形的外圍加上任何東西。



步驟 6

利用選擇工具畫一個長方形包圍著整個圖形。當一個由虛線的框子包圍著圖形後，點選編輯/複製。跟著選擇編輯/貼上。把複本放在適當的位置上。拖曳這複本並把它放在原本圖形的右面。



步驟 7

更改複本的顏色。



步驟 8

將兩個圖形合併為一體。它變成密鋪圖形的一個基本結構單位。

示例 8

.....

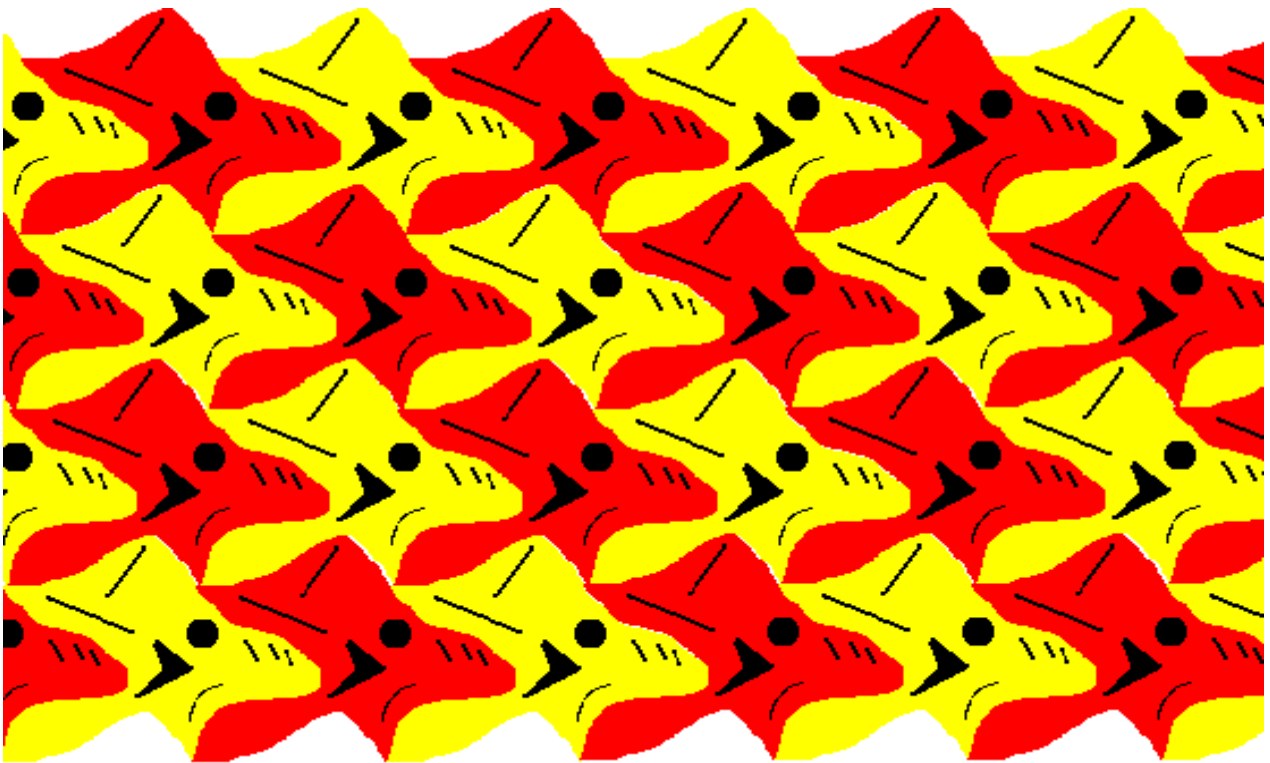
步驟 9

輪流地將圖形複製及貼上，形成密鋪圖形的首列。



步驟 10

當第一列完成後，你可以複製整列及將它們組合成密鋪圖形，如下圖：



.....

附件 II

使用 *Sketchpad* 透過平移來製作的密鋪圖形的指引

透過改變正方形、菱形、六邊形、平行四邊形或長方形製作密鋪圖形是較為簡單的方法。

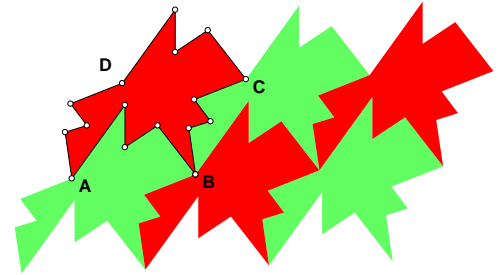
(I) 建構密鋪式樣

1. 選擇以上其中一個多邊形。繪畫這圖形並填上顏色。移動圖形直至它位於你認為適當的位置。
2. 刪除圖形的兩條對邊，以一系列連續的直線代替它們。
3. 選擇圖形中其中一個頂點及正對面的另一個頂點。跟著從 **Transform** 菜單中選擇 **Mark Vector**。
4. 只選擇剛才你繪畫的所有線段和點。確保沒有點選原本圖形的頂點。
5. 在 **Transform** 菜單中選擇 **Translate**，然後點選 **OK**。
6. 重複步驟 2-5 直至你改變了原本圖形的所有邊。
7. 選擇所有頂點，然後由 **Construct** 菜單中選擇 **Polygon Interior**。在 **Display** 菜單中可改變圖形的內部顏色。

示例 8

(II) 密鋪平面

1. 選擇原本圖形的其中一個頂點以及正對面的另一個頂點。跟著從 **Transform** 菜單中選擇 **Mark Vector**。
2. 選擇圖形的內部。
3. 在 **Transform** 菜單中選擇 **Translate** 和點選 **OK**。現在你應該有兩個一模一樣的圖形。改變剛製造出來的圖形的顏色。
4. 繼續把圖形平移直至你有 9 至 12 個圖形。有時你需要標記新的向量。你亦可以同一時間平移兩個或以上的圖形，這樣會節省你的時間。
5. 當你完成後，你需要在圖形下面的方格內填上你的姓名。
6. 在列印圖形方面，你可以選擇 **Print Preview** 並選擇 **Scale to fit on page**。跟著將圖形傳送到印表機上。



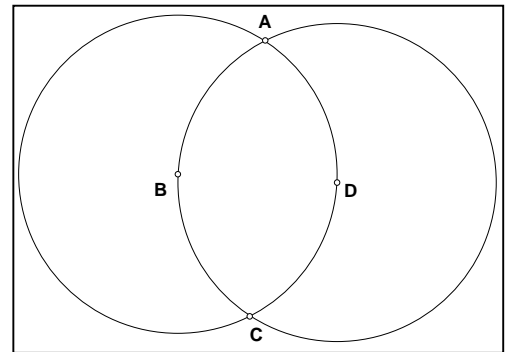
附件 III

使用 *Sketchpad* 透過反射來製作密鋪圖形的指引。

利用反射來製作密鋪圖形，你可以由一個以 60° 和 120° 作為內角的菱形開始。

(I) 構作一個菱形

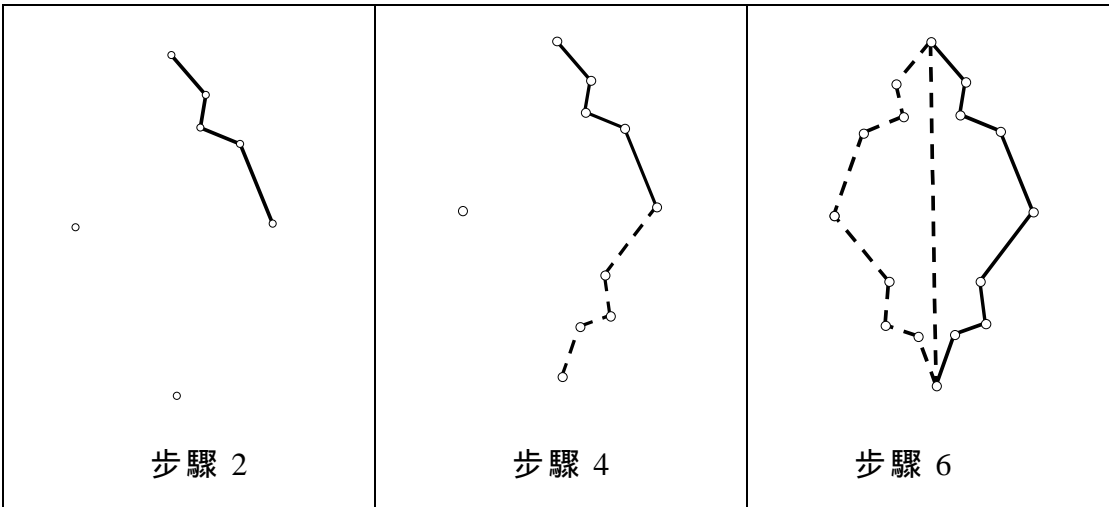
1. 在螢幕上加上點 B 和 D。點選 B 然後 D。在 **Construct** 菜單中選擇 **Circle By Center and Point** 來製作一個圓形。
2. 跟著點選 D 然後 B。利用步驟 1 的同一過程製作另一個圓形。
3. 將兩個圓形的相交點分別稱為 A 和 C。



(II) 創作密鋪式樣

1. A、B、C 和 D 四點是菱形的四個頂點。你不需要加上線段，因為遲些會把它們隱藏起來。
2. 用一系列相連的線段連接點 A 和 D (如圖示)。
3. 點選頂點 D。使用雙按或從 **Transform** 菜單中選擇 **Mark Center D** 來標記 D 為中心。
4. 選擇你剛在步驟 2 繪畫的點和線段(不包括終點 A 和 D)。在 **Transform** 菜單中選擇 **Rotate**，以 D 為中心將線段旋轉 120° 。(如不能夠，可改為 -120°)。線段會連接下一個頂點 C (如圖示)。
5. 畫一條對角線 AC。使用雙按或從 **Transform** 菜單中選擇 **Mark Mirror** 來標記 AC 為反射鏡。
6. 選擇由 A 點經 D 點至 C 點中所有點和線段 (不包括對角線 AC 及頂點 A 和 D) 並將它們沿著 AC 反射 (如圖示)。
7. 隱藏對角線 AC。拖曳各點直至沒有線段重疊。

示例 8



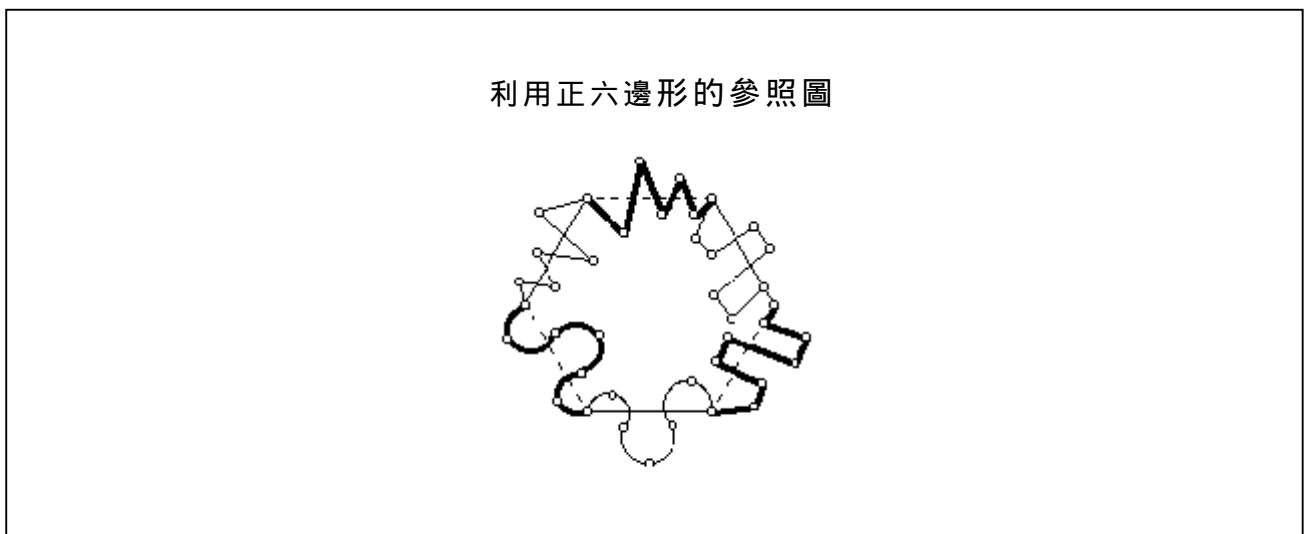
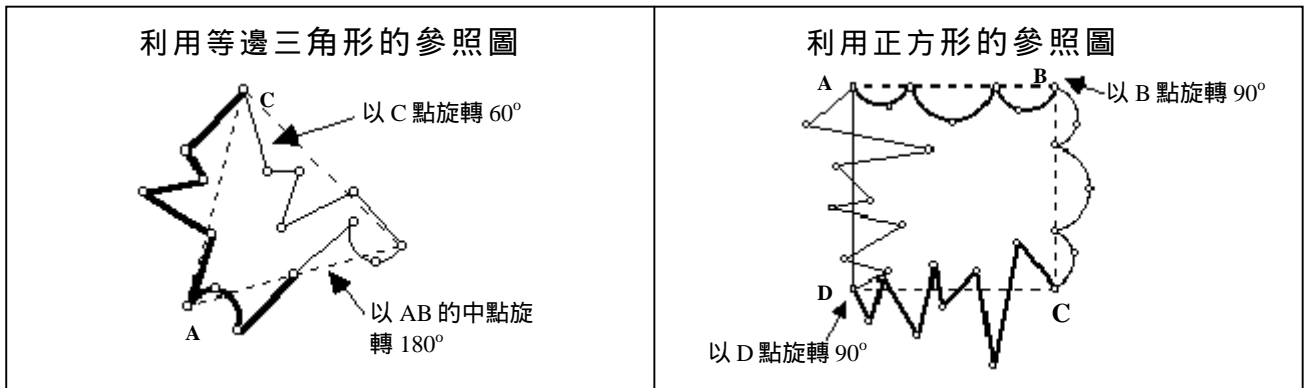
(III) 密鋪平面

1. 點選 B 點並使用 **Transform** 菜單中標記 B 點作為中心。
2. 選擇整幅圖形(利用 **Arrow** 工具畫一個長方形圍繞圖形)及使用 **Transform** 菜單將圖形旋轉 120° 。
3. 當圖形仍被選擇時，再把它旋轉 120° 。
4. 選擇看起來像是 B 點的直接影像的另一點(在整個圖形的外框)，把這點標記為中心(如果你猜錯了，你可利用 **Edit/Undo** 來復原)。
5. 選擇整個圖形，把它旋轉 120° 。
6. 當圖形仍被選擇時，再把它旋轉 120° 。
7. 重覆步驟 4-6 直至你獲得足夠的圖案。

附件 IV

使用 *Sketchpad* 透過旋轉來製作密鋪圖形的指引。

利用旋轉來製作密鋪圖形，你可以由一個等邊三角形、正方形或正六邊形開始。



(I) 創作密鋪式樣

1. 將兩個頂點，例如 A 點和 B 點，用一系列相連的線段或曲線相連結。
2. 選擇 B 點並使用 **Transform** 菜單將它標記為中心。
3. 選擇所有你剛繪畫的點、線段和曲線(A 和 B 點除外)並使用 **Transform** 菜單以 B 點為中心，將它們旋轉一個特定角度(如 60° ， 90° ， 120° 等等)。

示例 8

-
4. 三角形：在三角形餘下的一條邊上作一個中點。然後用相連的線段或曲線將中點和它其中一鄰點相連。選擇中點作為中心並將你剛繪畫的點、線段或曲線以中點為中心旋轉 180° (剛好和另一端的頂點接合)。

正方形：在正方形餘下的兩條邊重複步驟 2 和 3。

六邊形：在餘下的每一對鄰邊上，重複步驟 2 和 3 兩次。

(II) 密鋪平面

1. 在原本圖形上選擇其中一個頂點並使用 **Transform** 菜單將它標記為中心。
2. 選擇整個圖形(利用“**Arrow**”工具畫一個長方形包圍著圖形)並使用 **Transform** 菜單將它旋轉 60° (三角形)、 90° (正方形)或 120° (六邊形)。
3. 當圖形仍被選擇時，用同一角度再把它旋轉。重複動作直至這一頂點完全被包圍著(對於三角形共有六個複本，正方形有四個，而六邊形則有三個)。
4. 在原本圖形上，選擇另一頂點並將它標記為中心。
5. 選擇整個圖形並將它旋轉一個適當的角度。
6. 當圖形仍被選擇時，再一次把它旋轉。
7. 重複步驟 4 至 6 直至你有足夠的圖案。



教師注意事項：

1. 教師可在下列網址找到更多有關使用 *Sketchpad* 製作密鋪平面的指示：
<http://forum.swarthmore.edu/sum95/suzanne/tess.gsp.tutorial.html>
<http://www.mste.uiuc.edu/courses/ci336kt/garrison/skpdindx.html>
2. 教師可給予學生一張評估表，令他們明白評估專題習作的準則。教師可在以下網址下載評估表的樣本：
<http://www.mste.uiuc.edu/courses/ci336kt/garrison/tessrub.doc>
3. 不建議學生使用 *小畫家* 軟件來完成專題習作。因為這軟件在透過反射和旋轉製作密鋪圖形上有一定的限制。例如，影像只能垂直或橫向地翻動和旋轉角度只可以是 90°、180°和 270°，而 *Sketchpad* 則較為適合製作有更多變化的密鋪圖形。
4. 對於學習能力較佳的學生，教師可要求他們撰寫一份有關每個步驟的構作過程及變換技巧的解釋報告。當然，這些學生在撰寫這類報告時亦可能覺得困難，教師應給予他們有關的指導。教師亦可在以下網址找到解釋報告的樣本：
<http://www.mste.uiuc.edu/courses/ci336kt/garrison/tesexpl.html>

參考資料：

網址：

1. <http://library.thinkquest.org/16661/templates/index.html>
2. <http://library.thinkquest.org/16661/escher.html>

書籍：

1. Britton, Jill and Britton, Walter (1992). *Teaching tessellating art: activities and transparency masters*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publication.
2. Burn, Bob (1987). *The Design of Tessellations*. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Seymour, Dale and Britton, Jill (1989). *Introduction to tessellations*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publication.
4. Seymour, Dale (1989). *Tessellation teaching masters*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publication.

