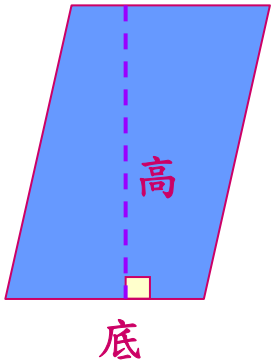
M04 從特殊到一般——
在小五面積探究活動中歸納公式

梁澤光老師（佛教林炳炎紀念學校）
招靜儀老師（佛教林炳炎紀念學校）
李潤強先生（小學校本課程發展組）

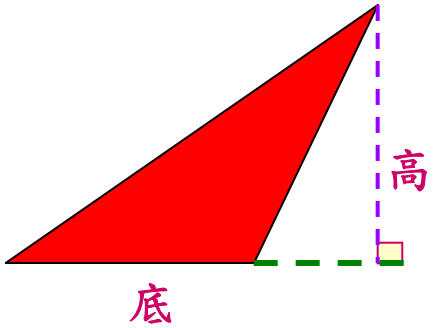
小五面積

1. 認識及應用平行四邊形、三角形和梯形面積的公式。



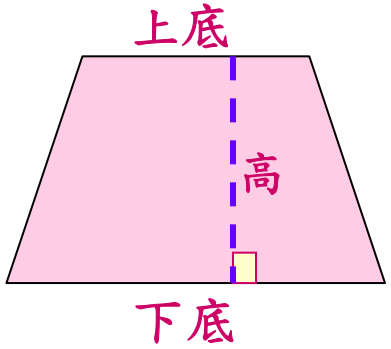
平行四邊形面積

= 底 x 高



三角形面積

= 底 x 高 ÷ 2



梯形面積

= （上底 + 下底） x 高 ÷ 2

2. 計算多邊形面積。

教學策略 ↔ 學生學習

1. 認識各圖形面積的公式

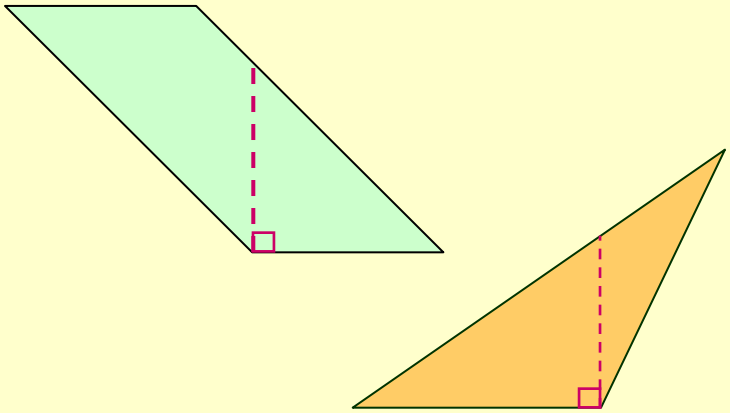
   - 直接講解各圖形面積的計算方法（公式）
   - 利用一、兩個特殊例子即歸納所有同類圖形面積的計算方法

- 學生可在較短時間認識面積的公式，然後集中解決運用的題目
- 學生學習被動，缺乏自行思考解決問題的訓練
- 部分學生不理解這些公式背後的意義
- 部分學生質疑公式的可靠性

教學策略 ↔ 學生學習

2. 認識各圖形的高度

- 較多學生不能分辨/繪畫圖形的高度，特別是當垂直線在圖形以外的位置時



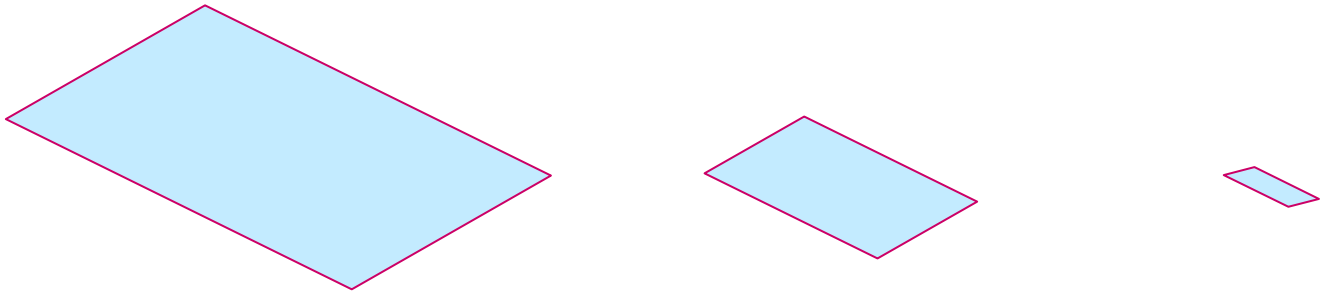
從特殊到一般——
在小五面積探究活動中歸納公式

分享重點：

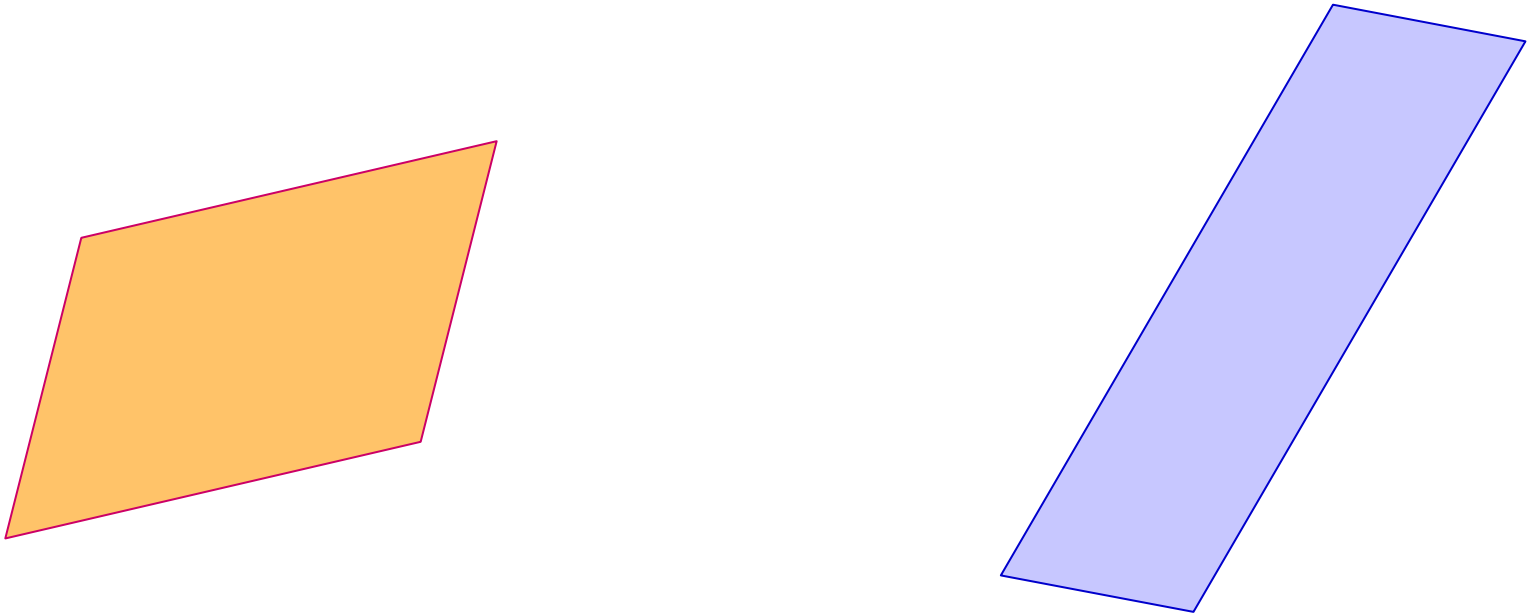
一. 引導學生探究平行四邊形、三角形和梯形面積的計算方法

二. 從特殊的例子，歸納以上面積的公式

三. 認識這些圖形的高和底



（一）探究平行四邊形面積



（一）探究平行四邊形面積公式
—準備工作：

✓：學生曾經學習的知識

- 探究步驟
  - 提出問題、建立猜想、驗證、交流、評價

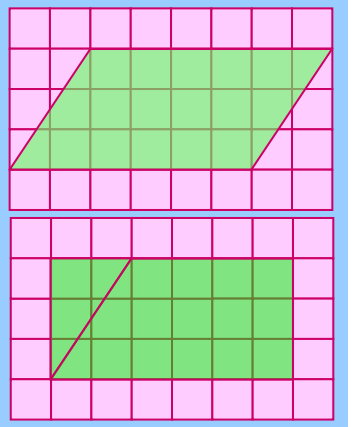
已有知識

需具備的知識：

- 面積概念 ✓
- 1平方厘米、1平方米 ✓
- 矩形面積（數格仔/公式）✓
- 平行四邊形特性 ✓
- 面積守恆 ?

新知識

- 拼砌成矩形
- 計算矩形面積
- 推論平行四邊形面積的計算方法



（一）探究平行四邊形面積公式
—準備工作：

小五上學期課程內容：

- 多位數
- 分數
- 八個方向
- 面積
- 象形圖
- 代數的初步認識

小四下學期課程內容：

- ……
- 面積
  - 認識面積的概念
  - 比較平面圖形的面積
  - 認識公認單位
  - 認識及應用正方形及長方形面積的公式

（一）探究平行四邊形面積公式
—準備工作：

1. 重溫
   - 面積的概念
   - 公認單位（1平方厘米、1平方米）
   - 正方形及長方形面積（數格仔、運用公式）

3 + 3 + 3

1 cm

1	2	3
4	5	6
7	8	9

正方形面積

= 3x3

= 9 (cm^2)

5 + 5 + 5

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

長方形面積

= 5 x 3

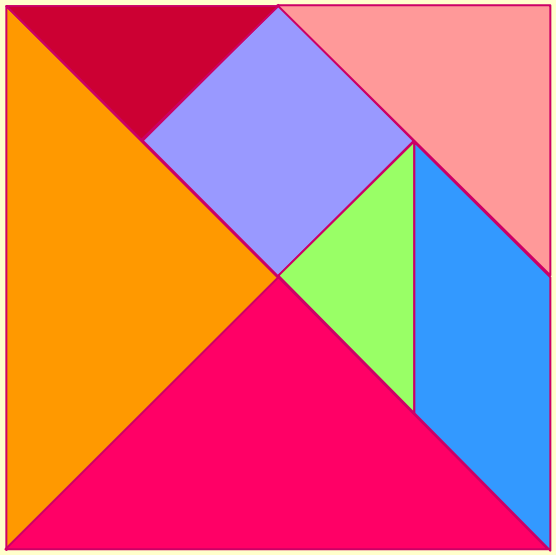
= 15 (cm^2)

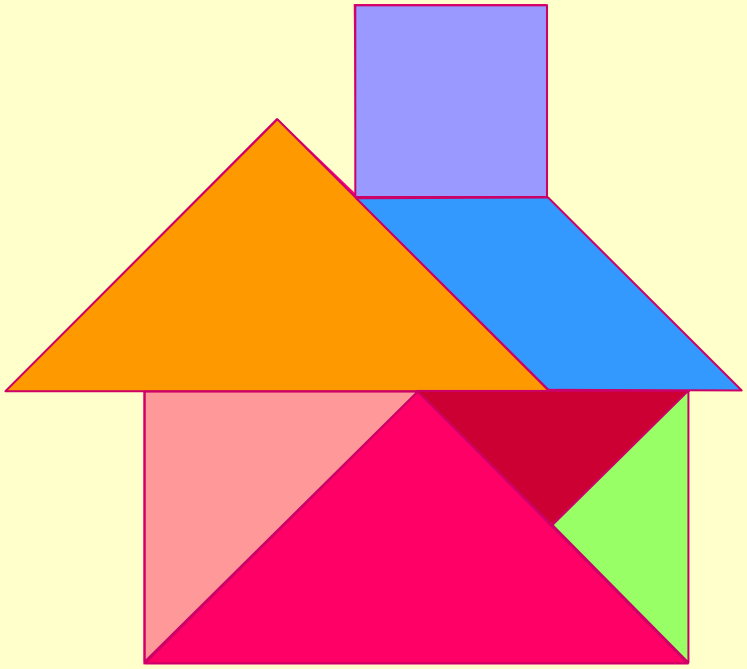
（一）探究平行四邊形面積公式
—準備工作：

2. 認識

- 面積守恆的概念

哪個圖形的面積較大？



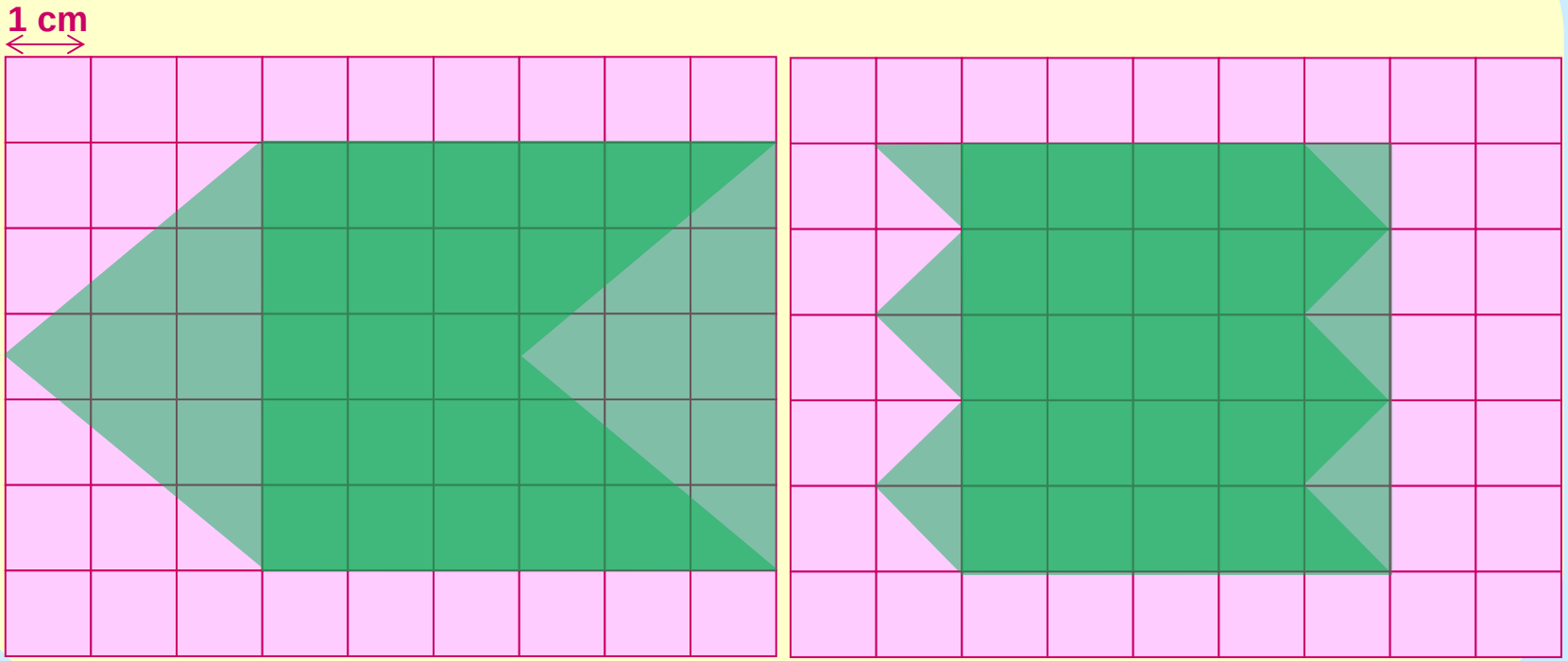


（一）探究平行四邊形面積公式
—準備工作：

2. 認識

- 利用面積守恆的概念，初試解決問題

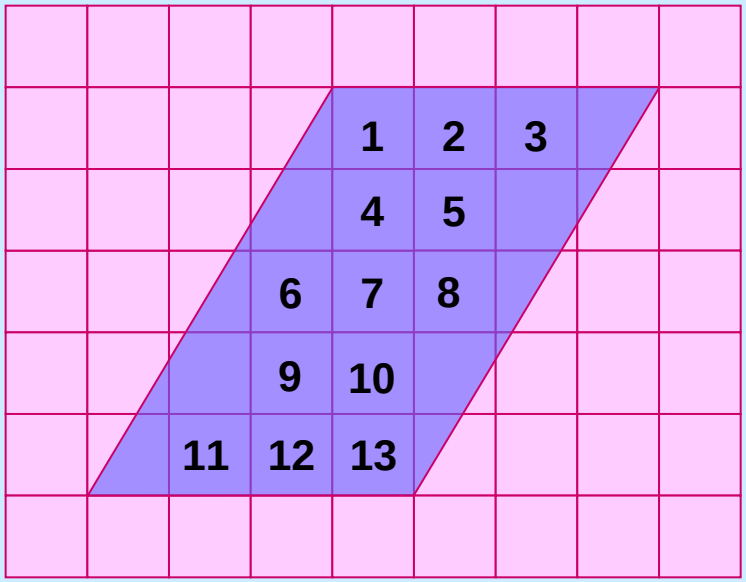
利用分割及拼砌，找出以下圖形的面積。



（一）探究平行四邊形面積公式
—準備工作：

讓學生在認知層面上產生「失調」（dissonance）

3. 重溫
   - 平行四邊形特性
4. 引發探究面積的動機



用數格仔的方法找出這個平行四邊形的面積。

20 cm^2

21 cm^2

（一）探究平行四邊形面積公式

本年度工作紙：—探究活動：

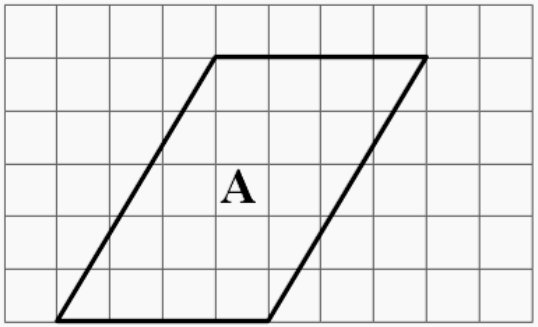
平行四邊形探究工作紙一

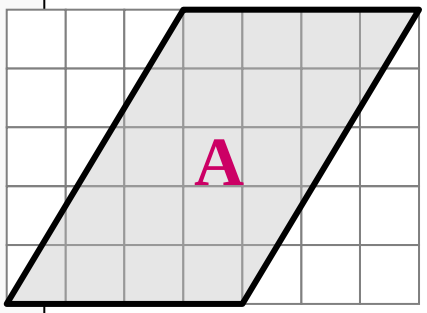
五年級_____班　　姓名:_____(　　)　　日期:_____

探究活動（一）：找出以下平行四邊形的面積

（一）試將手上的平行四邊形剪開，重新拼湊成一個你們懂得運用公式計算的圖形，並貼在下列方格內。

（二）平行四邊形 A 可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出平行四邊形 A 的面積？最後寫出你的發現。





我的發現:

_____

_____

_____

想一想：　其他平行四邊形的面積又怎樣計算？

_____

（一）探究平行四邊形面積公式

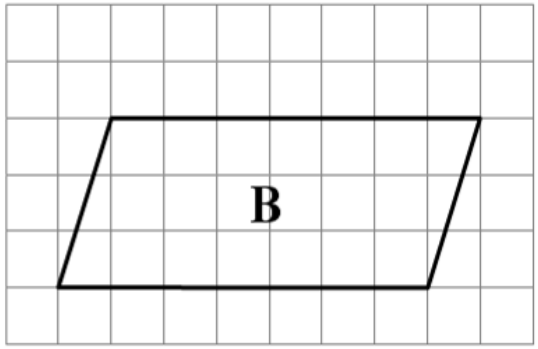
本年度工作紙：—探究活動：

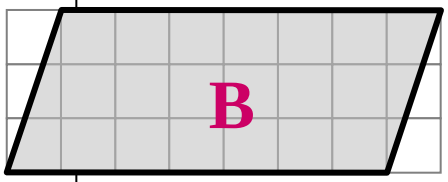
五年級_____班　　姓名:_____(　　)　　日期:_____

探究活動（一）：找出以下平行四邊形的面積

（一）試將手上的平行四邊形剪開，重新拼湊成一個你們懂得運用公式計算的圖形，並貼在下列方格內。

（二）平行四邊形 B 可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出平行四邊形 B 的面積？最後寫出你的發現。





我的發現:

_____

_____

_____

想一想：　其他平行四邊形的面積又怎樣計算？

_____

（一）探究平行四邊形面積公式

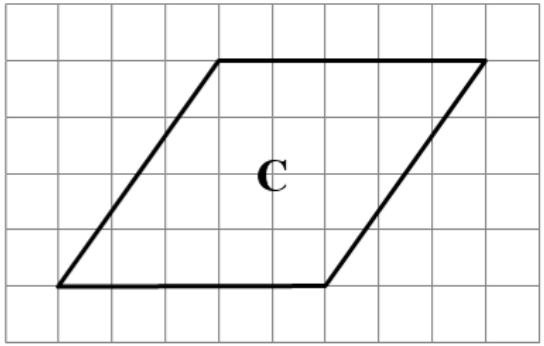
本年度工作紙：—探究活動：

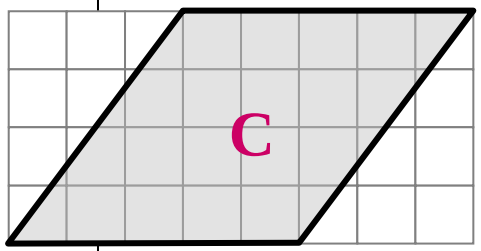
五年級_____班　　姓名:_____(　　)　　日期:_____

探究活動（一）：找出以下平行四邊形的面積

（一）試將手上的平行四邊形剪開，重新拼湊成一個你們懂得運用公式計算的圖形，並貼在下列方格內。

（二）平行四邊形 C 可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出平行四邊形 C 的面積？最後寫出你的發現。





我的發現:

_____

_____

_____

想一想：　其他平行四邊形的面積又怎樣計算？

_____

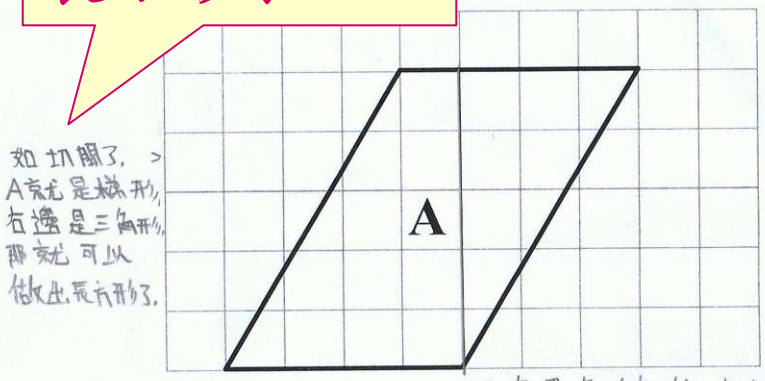
（一）探究平行四邊形面積公式
究活動：學生作品

如切開了，A就是梯形，右邊是三角形，那就可以做出長方形了。

探究活動（一）：找出以下平行四邊形的面積

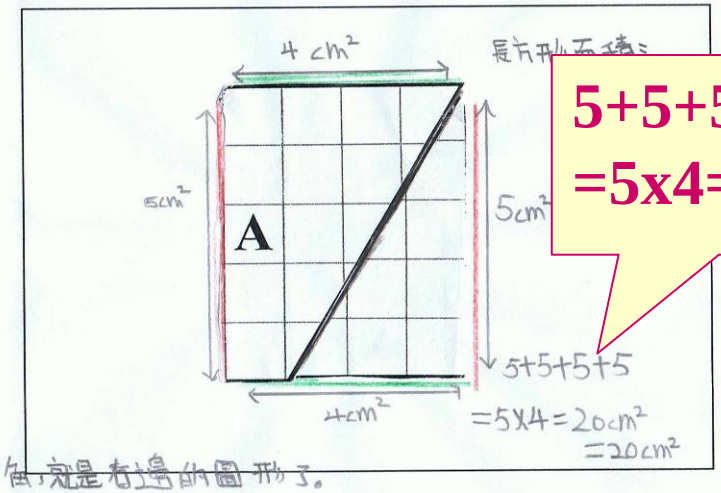
四邊形剪開，重新拼湊成一個你們懂得運用公式計算的圖形，並貼在下列方格內。

拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出平行四邊形 A 的面積？最後寫出你的發現。



如切開了，A就是梯形，右邊是三角形，那就可以做出長方形了。

把有黑色線的地方切開，然後再把三角形放在右下角，就是右邊的圖形了。



5+5+5+5
=5x4=20cm²

我的發現：

我發現如果重組這個圖形來計算真是快了很多。

我發現如果重組這個圖形來計算真是快了很多。

想一想： 其他平行四邊形的面積又怎樣計算？

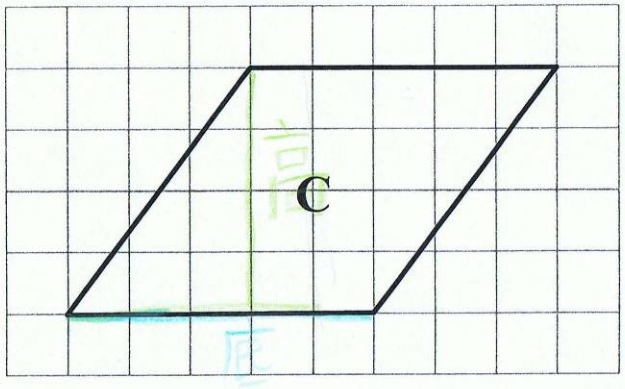
底 X 高

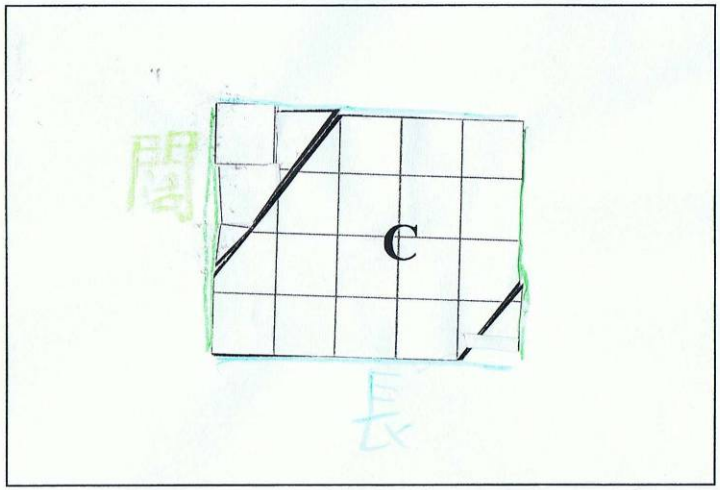
（一）探究平行四邊形面積公式
—探究活動：學生作品

探究活動（一）：找出以下平行四邊形的面積

（一）試將手上的平行四邊形剪開，重新拼湊成一個你們懂得運用公式計算的圖形，並貼在下列方格內。

（二）平行四邊形 C 可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出平行四邊形 C 的面積？最後寫出你的發現。





我的發現：

我發現平行四邊形可拼湊成一個長方形。

想一想： 其他平行四邊形的面積又怎樣計算？

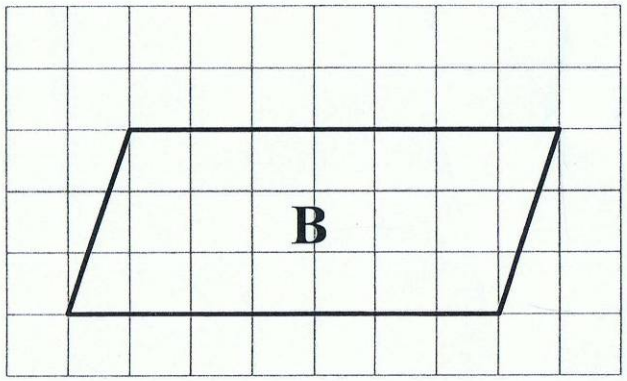
底 × 高

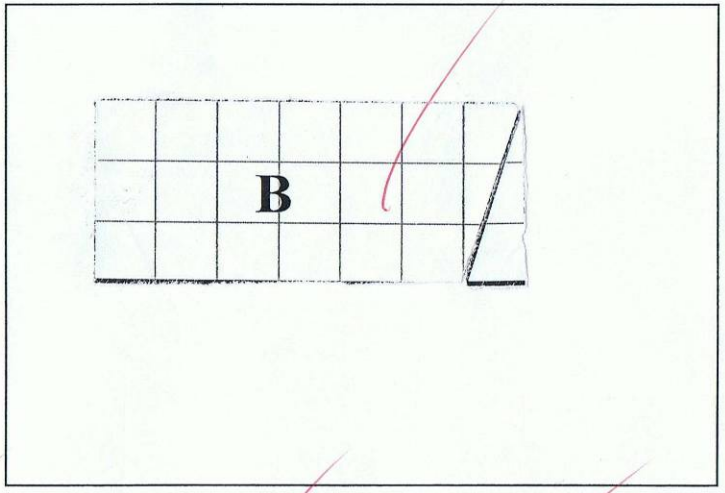
（一）探究平行四邊形面積公式
—探究活動：學生作品

探究活動（一）：找出以下平行四邊形的面積

（一）試將手上的平行四邊形剪開，重新拼湊成一個你們懂得運用公式計算的圖形，並貼在下列方格內。

（二）平行四邊形 B 可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出平行四邊形 B 的面積？最後寫出你的發現。





我的發現：

我發現如果就這樣數方格的話，有些方格可能大於半格或小於半格，計算起來使人混淆。平行四邊形B可以拼湊成長方形，我先將平行四邊形切開一角，然後把缺開的一角和切開的一角連接起來，做成了一個長方形了。

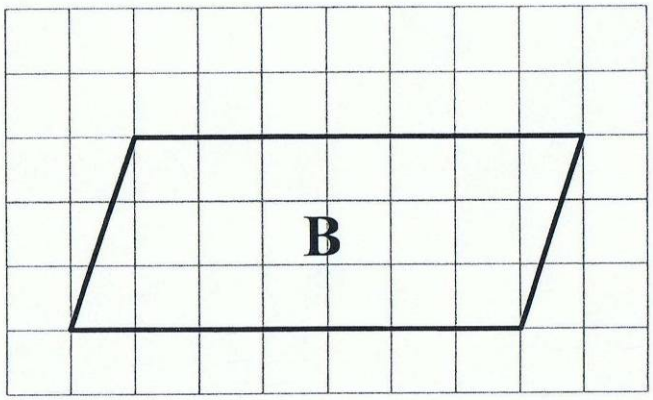
我發現如果就這樣數方格的話，有些方格可能大於半格或小於半格，計算起來使人混淆。平行四邊形 B 可以拼湊成長方形，我先將平行四邊形切開一角，然後把缺開的一角和切開的一角連接起來，做成了一個長方形了。

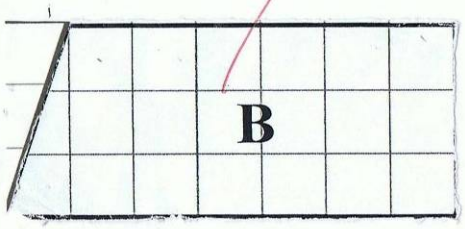
（一）探究平行四邊形面積公式
—探究活動：學生作品

探究活動（一）：找出以下平行四邊形的面積

（一）試將手上的平行四邊形剪開，重新拼湊成一個你們懂得運用公式計算的圖形，並貼在下列方格內。

（二）平行四邊形 B 可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出平行四邊形 B 的面積？最後寫出你的發現。





我的發現：

我發現把一邊不足一格的格點到另外一邊不足一格的格，成為長方形，再把它的長和闊相乘，便得出它的面積。3×7=21，平行四邊形B的面積是21平方厘米。

想一想： 其他平行四邊形的面積又怎樣計算？

把底和高相乘。

閱 左

（一）探究平行四邊形面積公式
—探究活動：初步結論

- 平行四邊形 A、B 及 C
  - 能拼砌成矩形
  - 拼砌成矩形的面積與之前的平行四邊形面積相等
  - 可以利用矩形面積公式找出該平行四邊形面積
- 對應矩形的「長」和「闊」與平行四邊形的「底」和「高」的關係
- 初步得出以上討論的3個平行四邊形A、B 及 C 面積的計算方法是「底 × 高」

（二）從特殊例子，歸納平行四邊形面積的公式

推理的種類

- 演繹法：由一般到特殊，或由普遍到個別。
- 歸納法：由特殊到一般，或由個別到普遍。

歸納推理

- 由某類事物的部分物件具有某些特徵,推出該類事物的全部物件都具有這些特徵，或者由個別事實概括出一般性的結論，這樣的推理稱為歸納推理(簡稱歸納) 。
- 歸納推理的結論具有或然性與不充分性。

（二）從特殊例子，歸納平行四邊形面積的公式

儘可能多考察被歸納的某類事物的對象，考察的對象愈多，結論的可靠性愈大。要防止「以偏概全」的邏輯錯誤。

參考資料
……

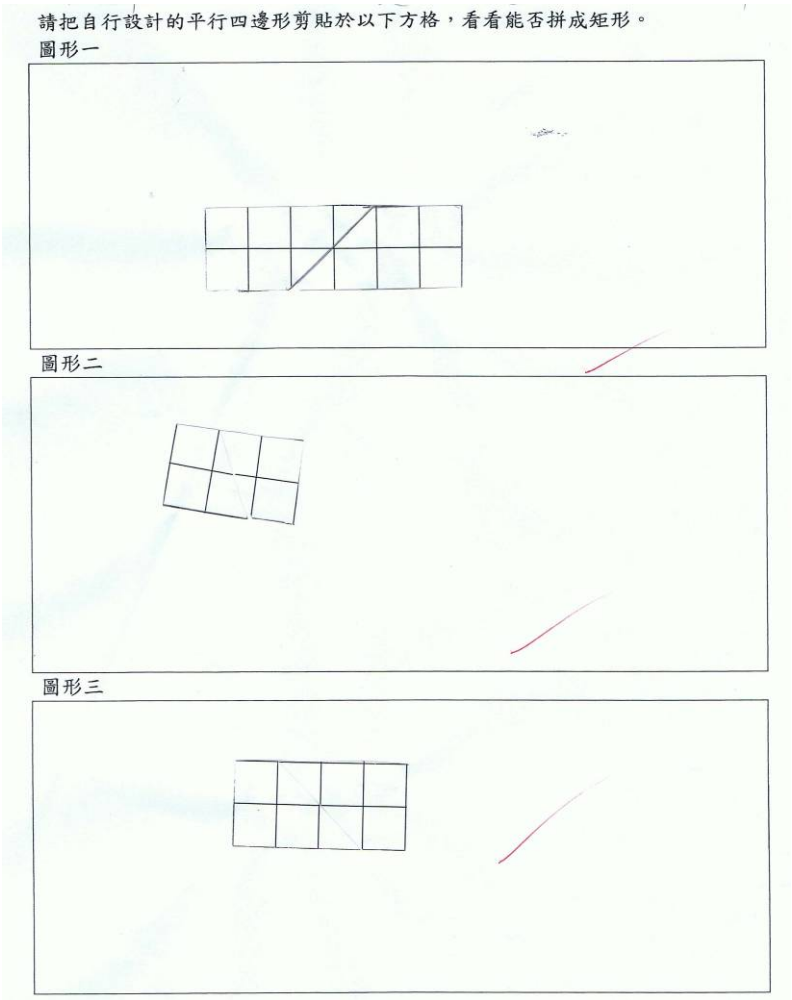
- 事例的數量要多 (多)
- 事的類別要廣 (廣)
- 沒有與結論不符的事例 (沒有反例)

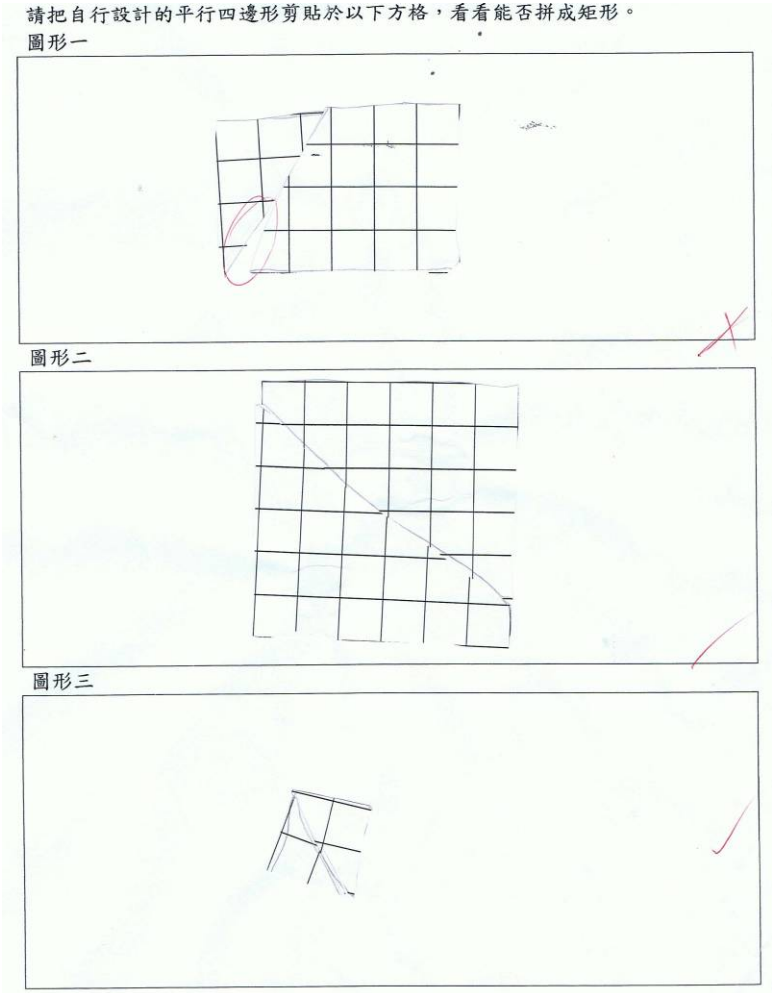
（二）從特殊例子，歸納平行四邊形面積的公式

完成課堂探究活動後……

1. 思考問題：
   - 是否所有平行四邊形都能拼砌成矩形？
   - 如何計算其他平行四邊形的面積？
2. 延伸活動：
   - （家課）任意製作最少3個不同的平行四邊形，然後嘗試拼砌成矩形，思考以上的問題。
   - （課堂）全班匯報結果，從約100個例子中，歸納平行四邊形面積的計算方法。

（二）從特殊例子，歸納平行四邊形面積的公式—學生作品





（一）探究三角形面積

（一）探究三角形面積公式
—準備工作：

✓：學生曾經學習的知識

已有知識

需具備的知識：

- 面積概念（單位）✓
- 矩形面積公式 ✓
- 平行四邊形公式 ✓

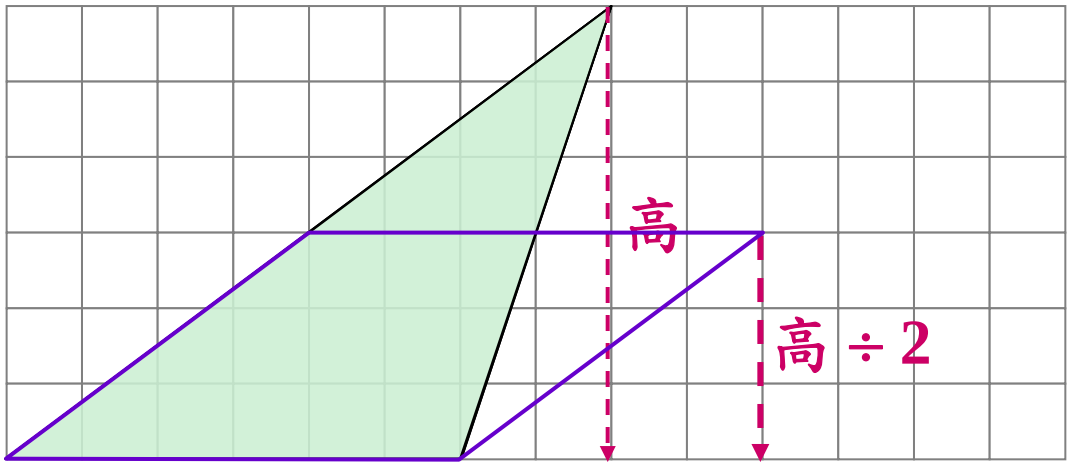
新知識

???

- 兩個相同的三角形拼砌成矩形或平行四邊形
- 計算矩形及平行四邊形面積
- 推論三角形面積的計算方法

（一）探究三角形面積公式
—準備工作：

活動： 能否利用一個三角形，拼砌成一個你懂得運用公式計算的圖形，然後推論三角形面積的計算方法？



三角形面積 = 底 × 高 ÷ 2

注意事項：
- 數量要多
- 類別要廣
- 沒有反例

一）探究三角形面積公式
—準備工作：

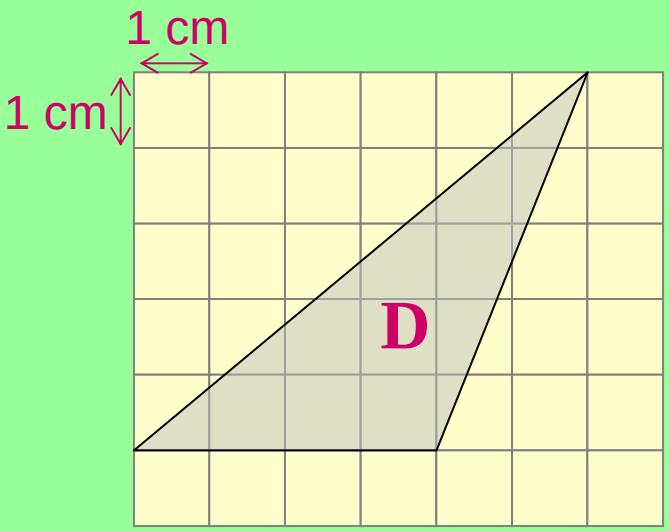
問題：

- 著學生拼砌多少個三角形？
- 甚麼類形的三角形？
  - 直角三角形
  - 等腰三角形
  - 等邊三角形
  - 不等邊三角形

?

引發探究面積的動機：

- 試數出以下三角形的面積



佛教林炳炎紀念學校(香港佛教聯合會主辦)

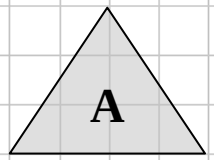
09-10 年度上學期五年級數學科探究工作紙　　成績：____/____

班別：五　　姓名：_____（　）日期：__-__-__

探究活動（二）：找出以下三角形的面積及計算方法

（一）試運用兩個相同的三角形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。

（二）兩個相同的三角形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出三角形的面積？最後寫出你的發現。。

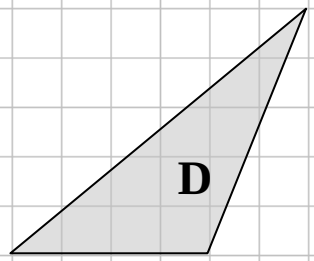


這個圖形的面積是_____

三角形 A 的面積是_____

這個圖形的面積是_____

三角形 B 的面積是_____



這個圖形的面積是_____

三角形 C 的面積是_____

這個圖形的面積是_____

三角形 D 的面積是_____

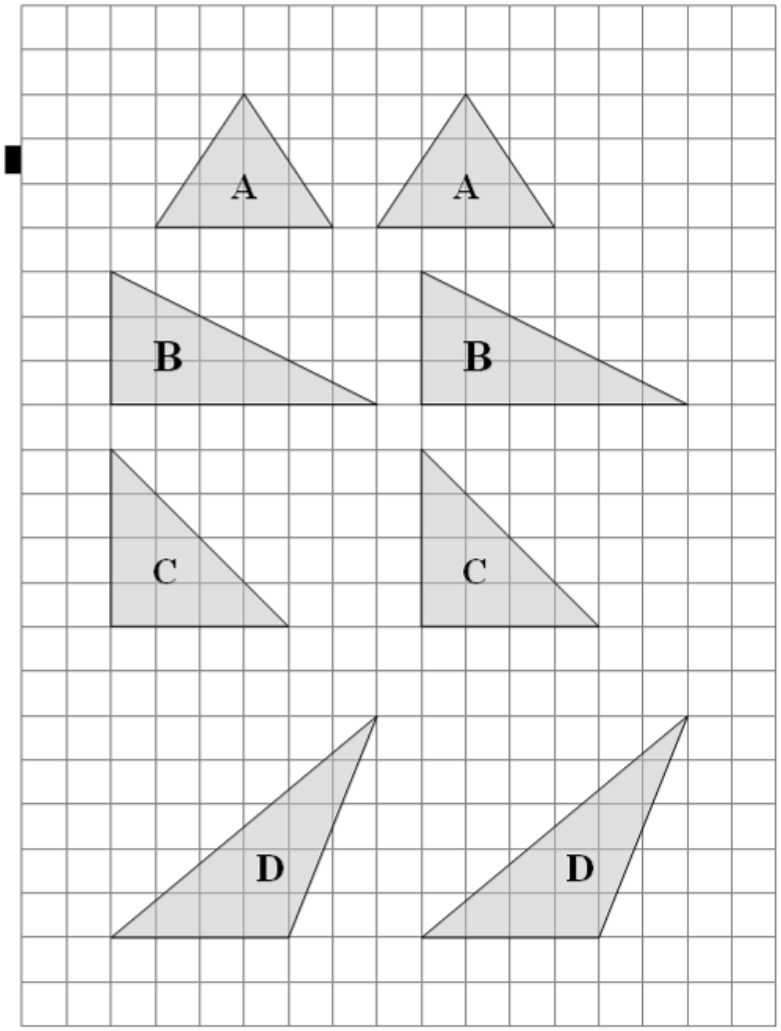
我們的發現 ：

_____

_____

_____

_____

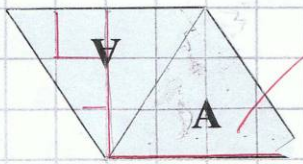


（一）探究三角形面積公式
探究活動：學生作品

探究活動（二）：找出以下三角形的面積及計算方法

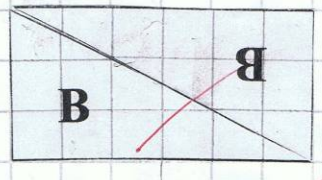
（一） 試運用兩個相同的三角形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。

（二） 兩個相同的三角形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出三角形的面積？最後寫出你的發現。。



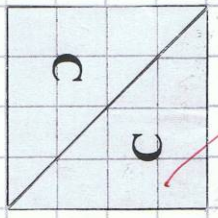
這個圖形的面積是 4×3=12 cm²

三角形 A 的面積是 12÷2=6 cm²



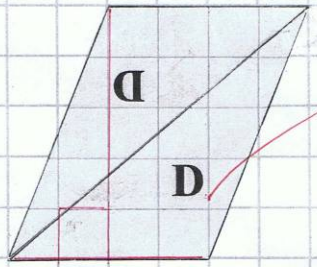
這個圖形的面積是 3×6=18 cm²

三角形 B 的面積是 18÷2=9 cm²



這個圖形的面積是 4×4=16 cm²

三角形 C 的面積是 16÷2=8 cm²



這個圖形的面積是 5×4=20 cm²

三角形 D 的面積是 20÷2=10 cm²

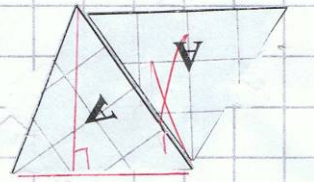
我們的發現 ：

我發現用兩個不同的三角形可拼成三種圖形，平行四邊形、長方形和正方形。如果是平行四邊的話先求結果再求一個三角形的面積。使用除法，由於這些圖形都是用兩個三角形組成的就把這圖形的面積÷2便等於這些三角形的面積。

探究活動（二）：找出以下三角形的面積及計算方法

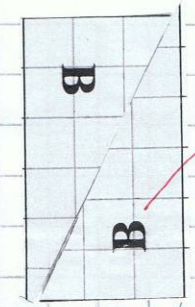
（一） 試運用兩個相同的三角形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。

（二） 兩個相同的三角形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出三角形的面積？最後寫出你的發現。。



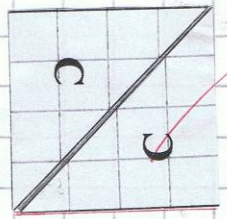
這個圖形的面積是 4×3=12(cm²)

三角形 A 的面積是 12÷2=6(cm²)



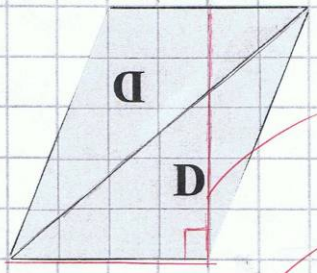
這個圖形的面積是 3×6=18(cm²)

三角形 B 的面積是 18÷2=9(cm²)



這個圖形的面積是 4×4=16(cm²)

三角形 C 的面積是 16÷2=8(cm²)



這個圖形的面積是 4×5=20(cm²)

三角形 D 的面積是 20÷2=10(cm²)

我們的發現 ：

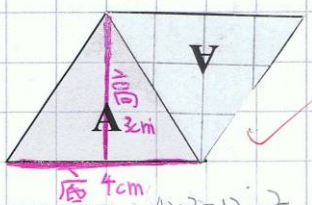
三角形可以拼成矩形，平行四邊形等等，然後運用矩形，平行四邊形的公式：長×闊，底×高，邊長×邊長來計算。....

（一）探究三角形面積公式
—探究活動：學生作品

探究活動（二）：找出以下三角形的面積及計算方法

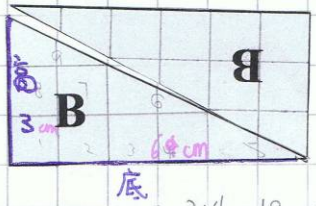
（一） 試運用兩個相同的三角形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。

（二） 兩個相同的三角形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出三角形的面積？最後寫出你的發現。。



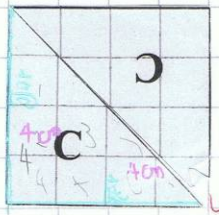
這個圖形的面積是 4x3=12cm²

三角形 A 的面積是 6 cm²



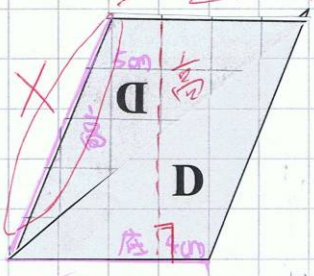
這個圖形的面積是 3x6=18cm²

三角形 B 的面積是 9 cm²



這個圖形的面積是 4x4=16cm²

三角形 C 的面積是 8 cm²



這個圖形的面積是 5x4=20 cm²

三角形 D 的面積是 10cm²

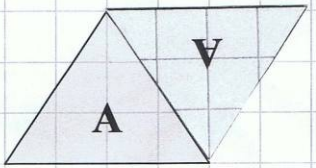
我們的發現 ：

三角形可以製造一些矩形。長x闊就是計算公式。

探究活動（二）：找出以下三角形的面積及計算方法

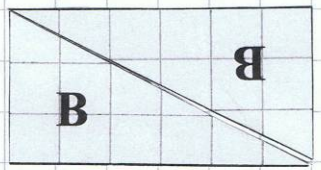
（一） 試運用兩個相同的三角形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。

（二） 兩個相同的三角形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出三角形的面積？最後寫出你的發現。。



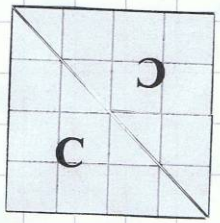
這個圖形的面積是 4x3=12cm²

三角形 A 的面積是 4x3÷2=6 cm²



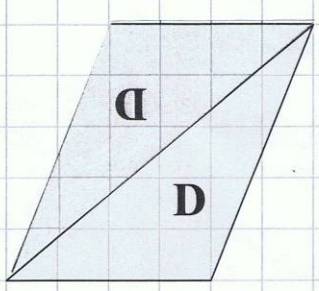
這個圖形的面積是 6x3=18 cm²

三角形 B 的面積是 6x3÷2=9cm²



這個圖形的面積是 4x4=16 cm²

三角形 C 的面積是 4x4÷2=8 cm²



這個圖形的面積是 5x4=20cm²

三角形 D 的面積是 5x4÷2=10cm²

我們的發現 ：

名稱錯

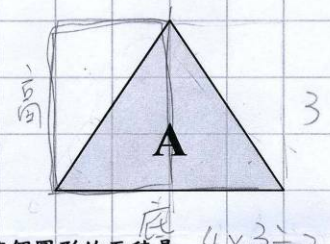
我們的發現三角形的公式是高乘闊÷2。

（一）探究
—探究

探究活動（二）：找出以下三角形的面積及計算方法

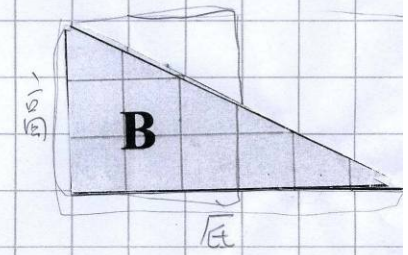
（一） 試運用兩個相同的三角形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。

（二） 兩個相同的三角形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出三角形的面積？最後寫出你的發現。。



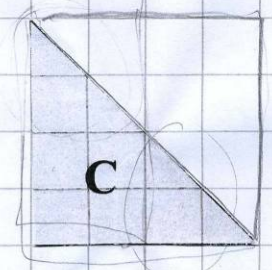
這個圖形的面積是 4×3÷2＝6cm²

三角形 A 的面積是 6cm²



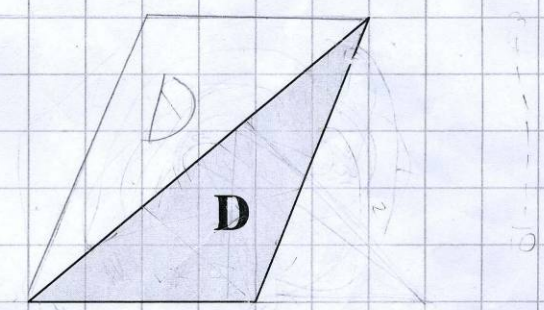
這個圖形的面積是 6×3÷2＝9cm²

三角形 B 的面積是 9cm²



這個圖形的面積是 4×4÷2＝8cm²

三角形 C 的面積是 8cm²



這個圖形的面積是 4×5÷2＝10cm²

三角形 D 的面積是 10cm²

我們的發現：

三角形的公式是底乘以高除2

（一）探究三角形面積公式
—探究活動：初步結論

- 三角形 A、B、C 及 D
  - 能用兩個相同的三角形拼砌成矩形或平行四邊形
  - 1個三角形的面積就是拼砌成矩形或平行四邊形面積的一半
  - 對應矩形的「長」和「闊」或平行四邊形的「底」和「高」與三角形的「底」和「高」的關係
- 初步得出以上討論的 4個三角形 A、B、C 及 D 面積的計算方法是「底 × 高 ÷ 2」

（二）從特殊例子，歸納三角形面積的公式

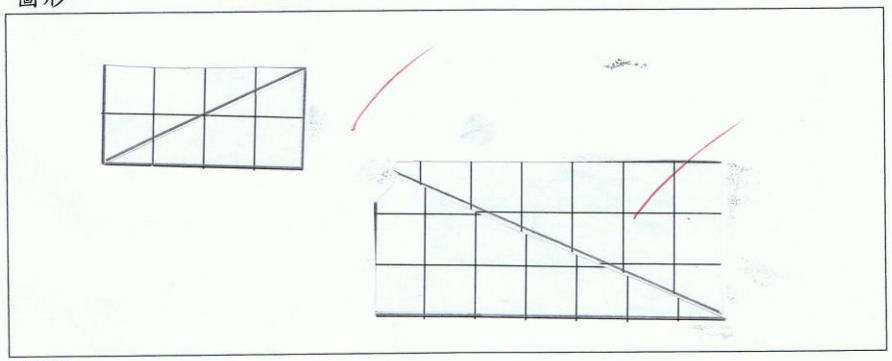
完成課堂探究活動後……

1. 思考問題：
   - 是否所有三角形都能利用以上的方法拼砌成矩形或平行四邊形？
   - 如何計算其他三角形的面積？
2. 延伸活動：
   - （家課）任意製作最少3對不同的三角形，然後嘗試拼砌成矩形或平行四邊形，思考以上的問題。
   - （課餘及課堂）把所有圖形貼在壁佈板上，讓全班觀看結果後，從約100個例子中，歸納三角形面積的計算方法。

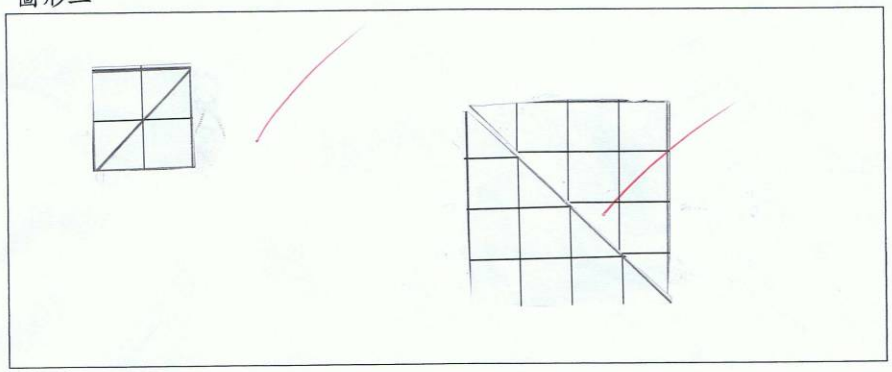
（二）從特殊例子，歸納三角形面積的公式—學生作品

請把自行設計的三角形(各兩個)貼於以下方格，看看能否拼成平行四邊形或矩形。

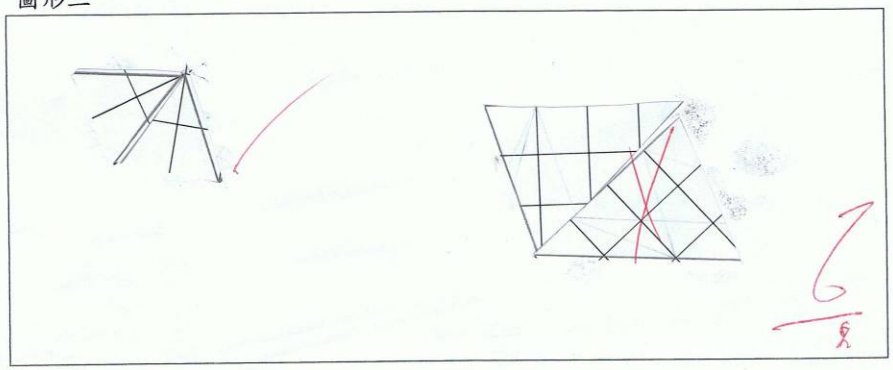
圖形一



圖形二

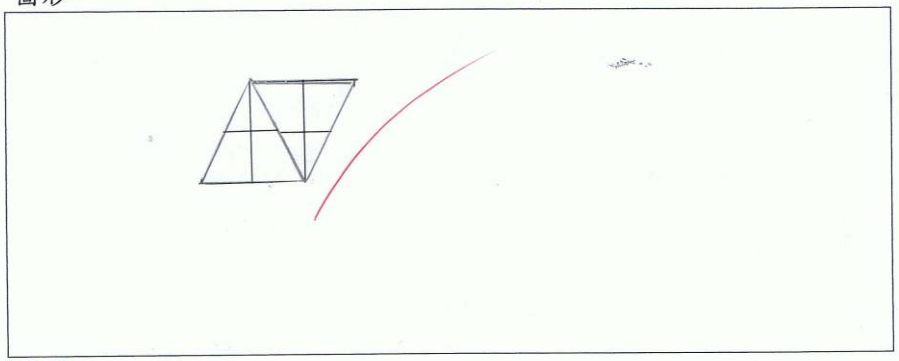


圖形三

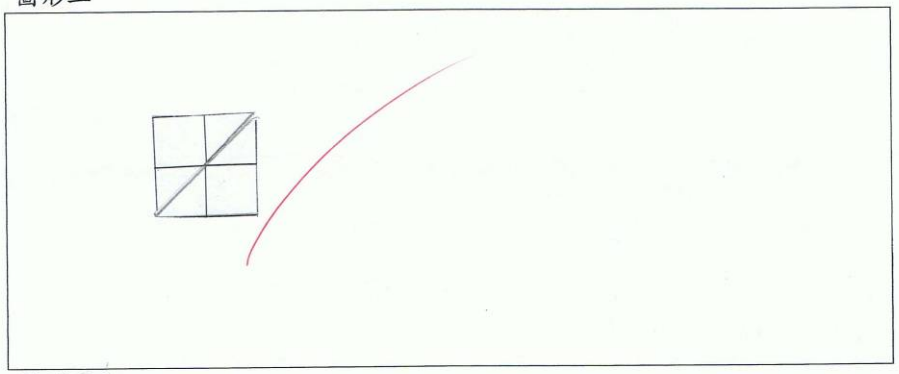


請把自行設計的三角形(各兩個)貼於以下方格，看看能否拼成平行四邊形或矩形。

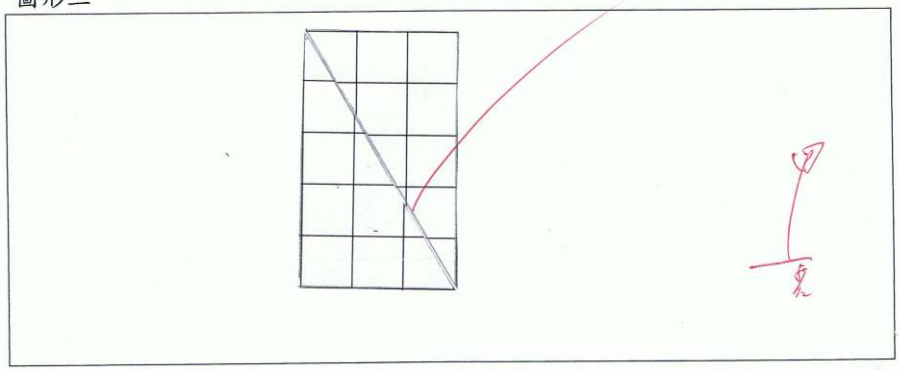
圖形一



圖形二



圖形三



（二）從特殊例子，歸納三角形面積的公式—學生作品

三角形拼貼

學生姓名：（姚　　）

我認爲拼貼錯誤的同學姓名：（聶　　）

錯誤的地方：

她的不是平行四邊形，是六角形。

三角形拼貼

學生姓名：（陸　　）

我認爲拼貼錯誤的同學姓名：（耳耳耳　　）

錯誤的地方：

她摺了六角形不是平行四邊形和矩形

三角形拼貼

學生姓名：（士　　）

我認爲拼貼錯誤的同學姓名：（耳耳耳　　）

錯誤的地方：

圖形應是平行四邊形或矩形，但她的剪出的圖形是六邊形。

三角形拼貼

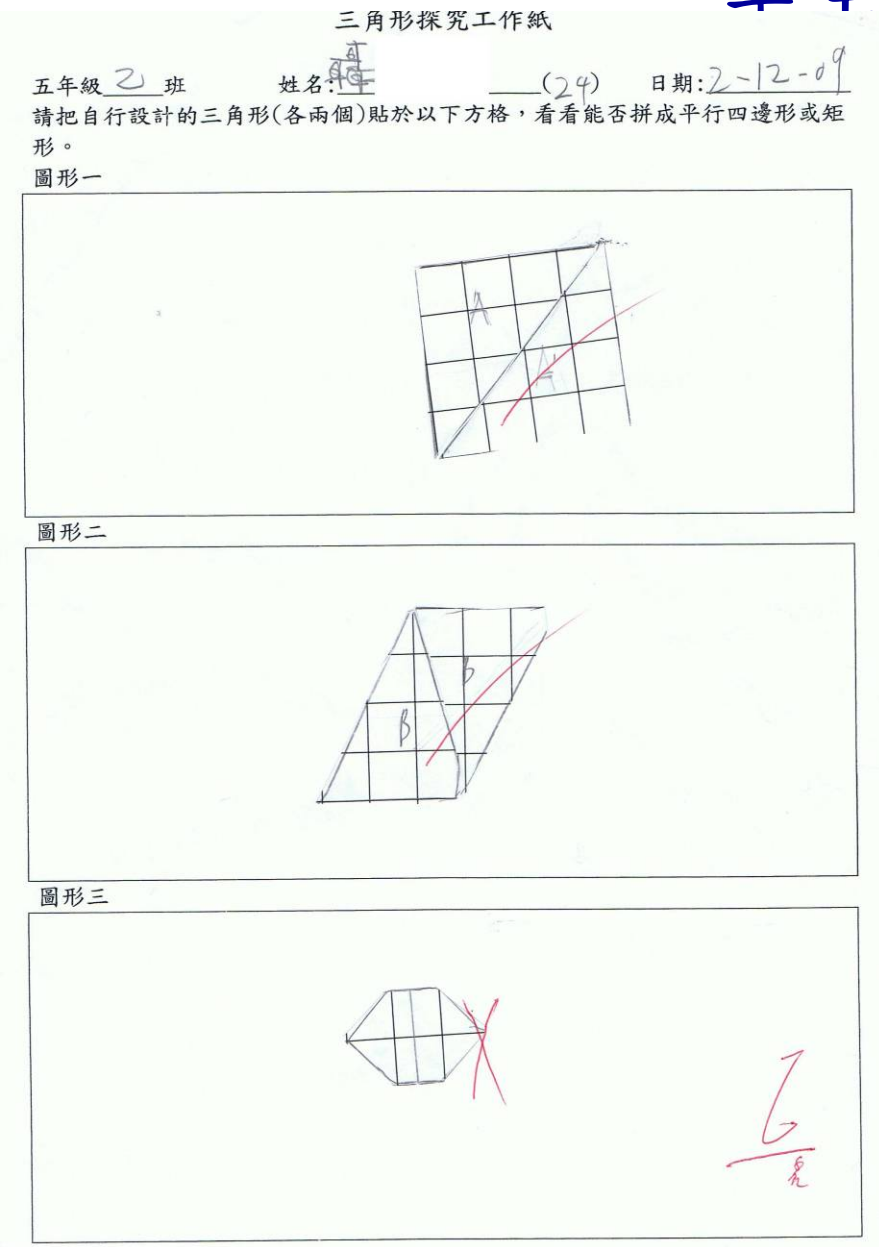
學生姓名：（鄭　　）

我認爲拼貼錯誤的同學姓名：（聶　　）

錯誤的地方：

她剪的不是平行四形和矩形，以是六角形。

（二）從特殊例子，歸納三角形面積的公式—學生作品



三角形探究工作紙

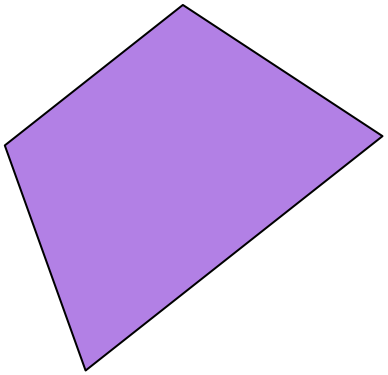
五年級 2 班　　姓名：[illegible]　　(24)　　日期：2-12-09

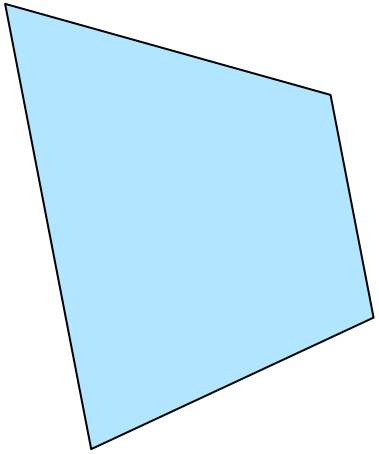
請把自行設計的三角形(各兩個)貼於以下方格，看看能否拼成平行四邊形或矩形。

圖形一

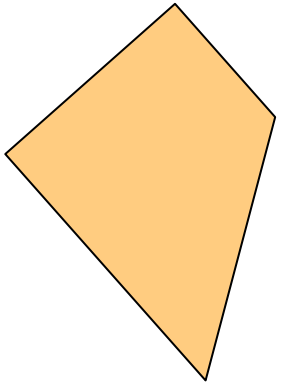
圖形二

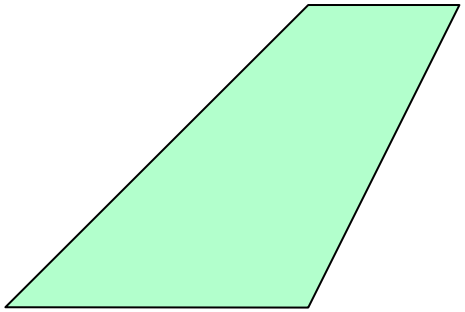
圖形三





（一）探究梯形面積

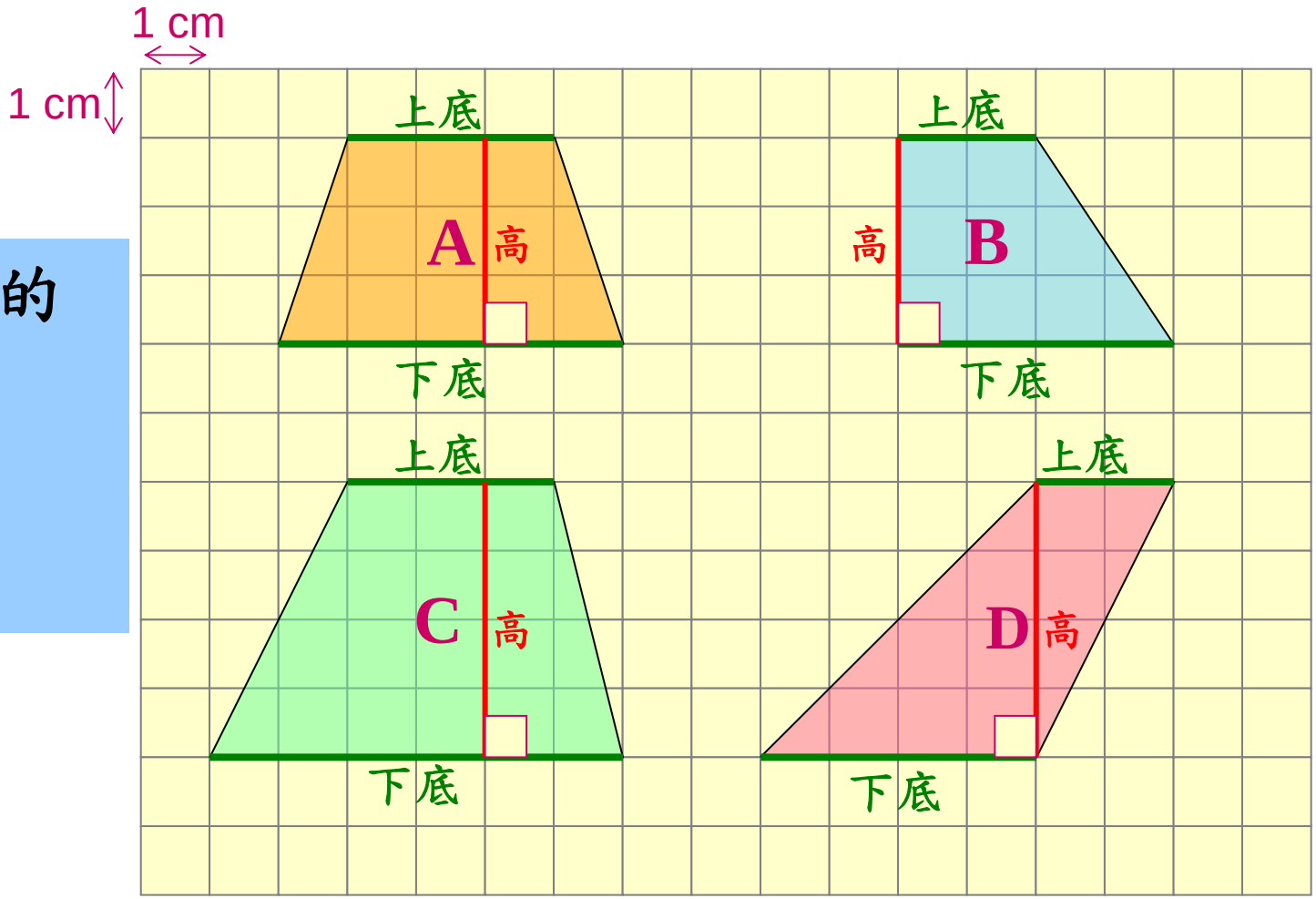




（一）探究梯形面積

先介紹梯形的

- 上底
- 下底
- 高



（一）探究梯形面積

佛教林炳炎紀念學校(香港佛教聯合會主辦)

09-10 年度上學期五年級數學科探究工作紙　　成績：____/____

班別：五　　姓名：_____（　）日期：__-__-__

探究活動（三）：找出以下梯形的面積及計算方法

（一）試運用兩個相同的梯形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。

這個圖形的面積是_____　　**這個圖形的面積是**_____

梯形 A 的面積是_____　　**梯形 B 的面積是**_____

這個圖形的面積是_____　　**這個圖形的面積是**_____

梯形 C 的面積是_____　　**梯形 D 的面積是**_____

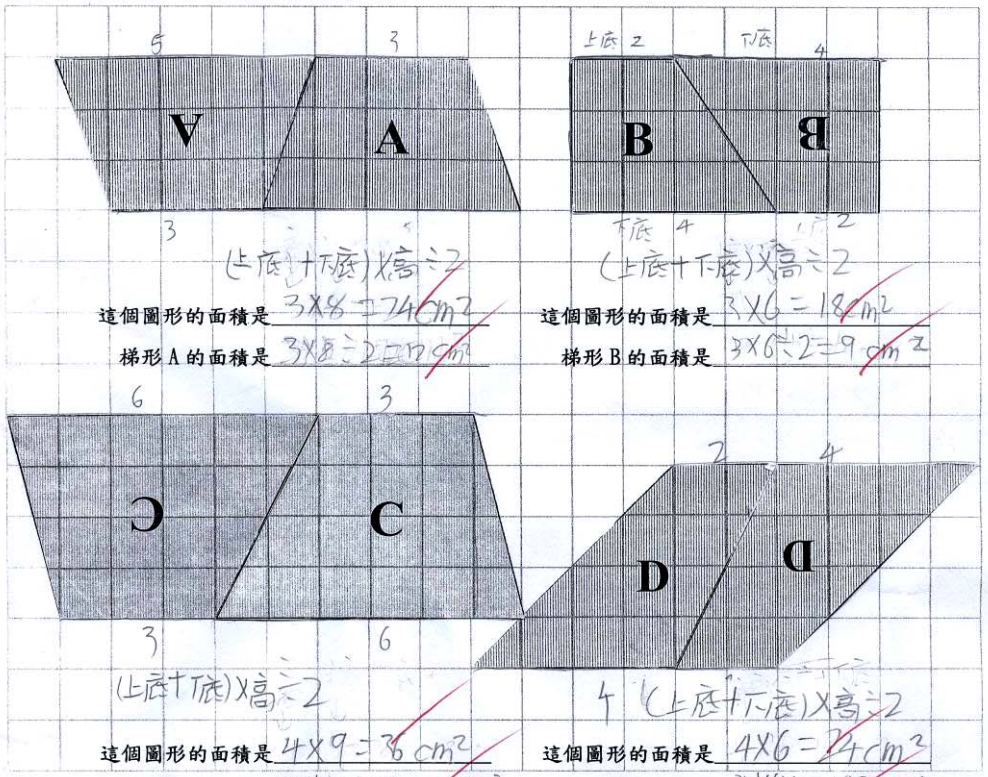
（二）兩個相同的梯形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出梯形的面積？

我們的發現：

想一想：其他梯形的面積又怎樣計算？

探究活動（三）：找出以下梯形的面積及計算方法

（一）試運用兩個相同的梯形，拼湊成一個你們懂得運用公式計算面積的圖形，並貼在方框內。



(上底+下底)×高÷2

這個圖形的面積是 3×8=24cm²　　**梯形 A 的面積是** 3×8÷2=12cm²

(上底+下底)×高÷2

這個圖形的面積是 3×6=18cm²　　**梯形 B 的面積是** 3×6÷2=9cm²

(上底+下底)×高÷2

這個圖形的面積是 4×9=36cm²　　**梯形 C 的面積是** 4×9÷2=18cm²

4 (上底+下底)×高÷2

這個圖形的面積是 4×6=24cm²　　**梯形 D 的面積是** 4×6÷2=12cm²

（二）兩個相同的梯形可拼湊成甚麼圖形？如何利用它找出梯形的面積？

我們的發現：

我發現兩個相同的梯形可以拼湊成平行四邊形和長方形，可以將下底+上底×高÷2可以計出梯形面積。

想一想：其他梯形的面積又怎樣計算？

將下底+上底×高÷2可以計出其他梯形的面積。

7/8

（三）認識平行四邊形、三角形的高和底

（三）認識平行四邊形的高和底

反思學生的難點

✓：學生曾經學習的知識

由底畫條垂直線去上面條邊，這條線就是高！

已有知識

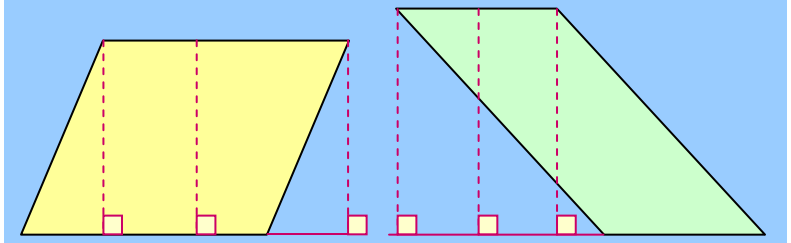
需具備的知識：

- 直角 ✓
- 垂直線 ✓
- 高度 ?

量度身高
- 身體站立
- 處身3維空間的環境

新知識

- 平行四邊形的高



圖形的高度
- 一般都平放在書桌上
- 平面圖形

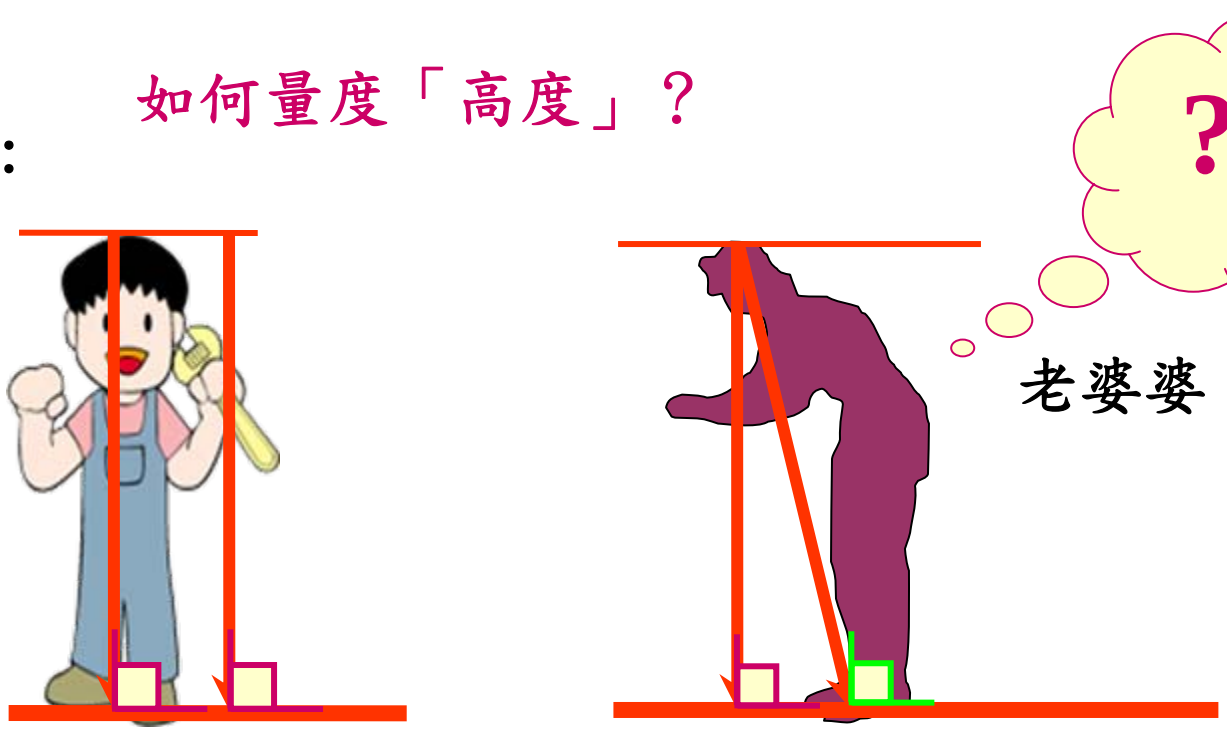
（三）認識平行四邊形的高和底

反思後的策略：

- 利用量度身高及其他物件高度的方法，引入量度平行四邊形高度的方法。
- 舉出高度不在身體或物件中的日常生活例子。

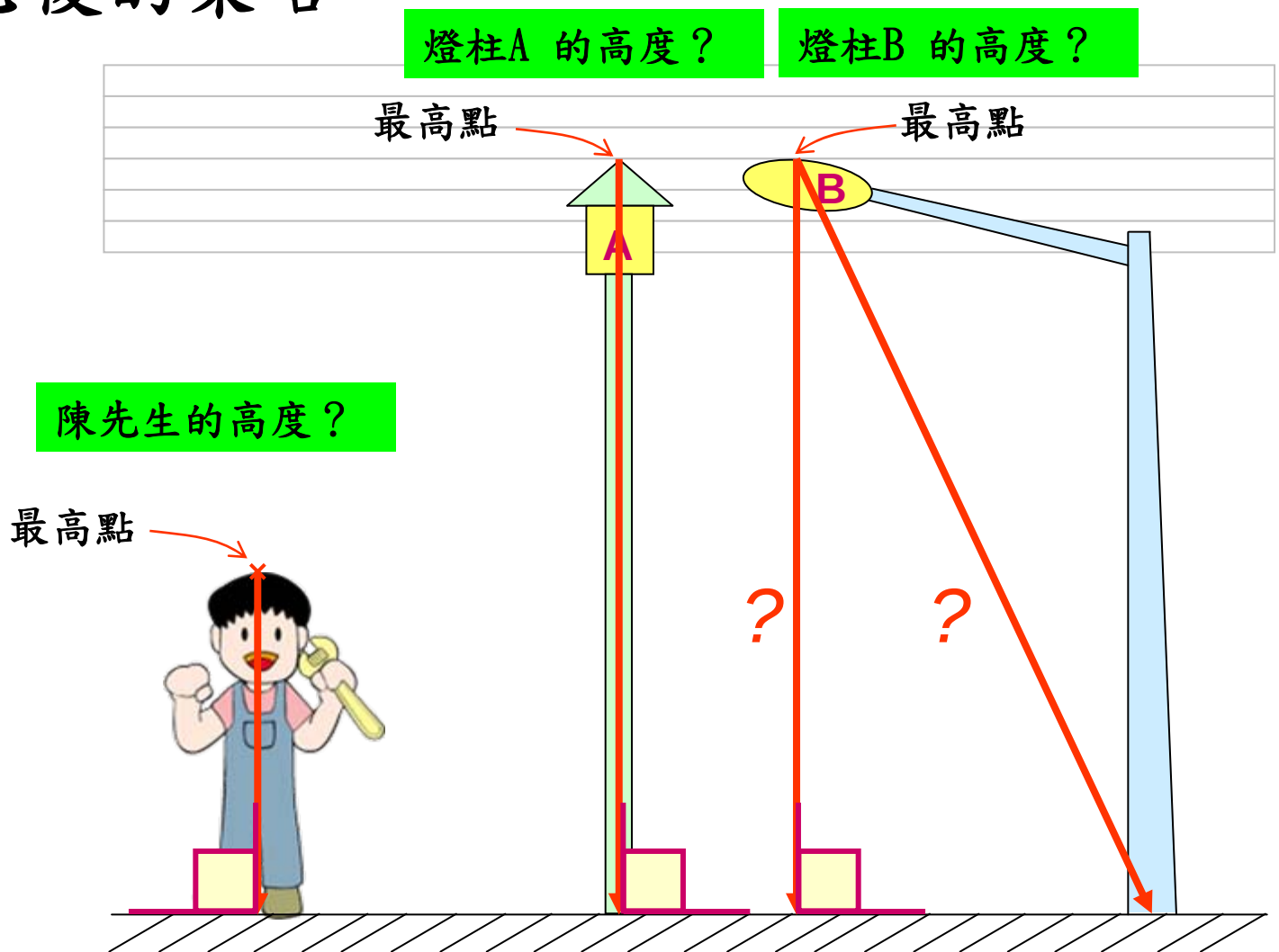
如何量度「高度」？

過往例子：



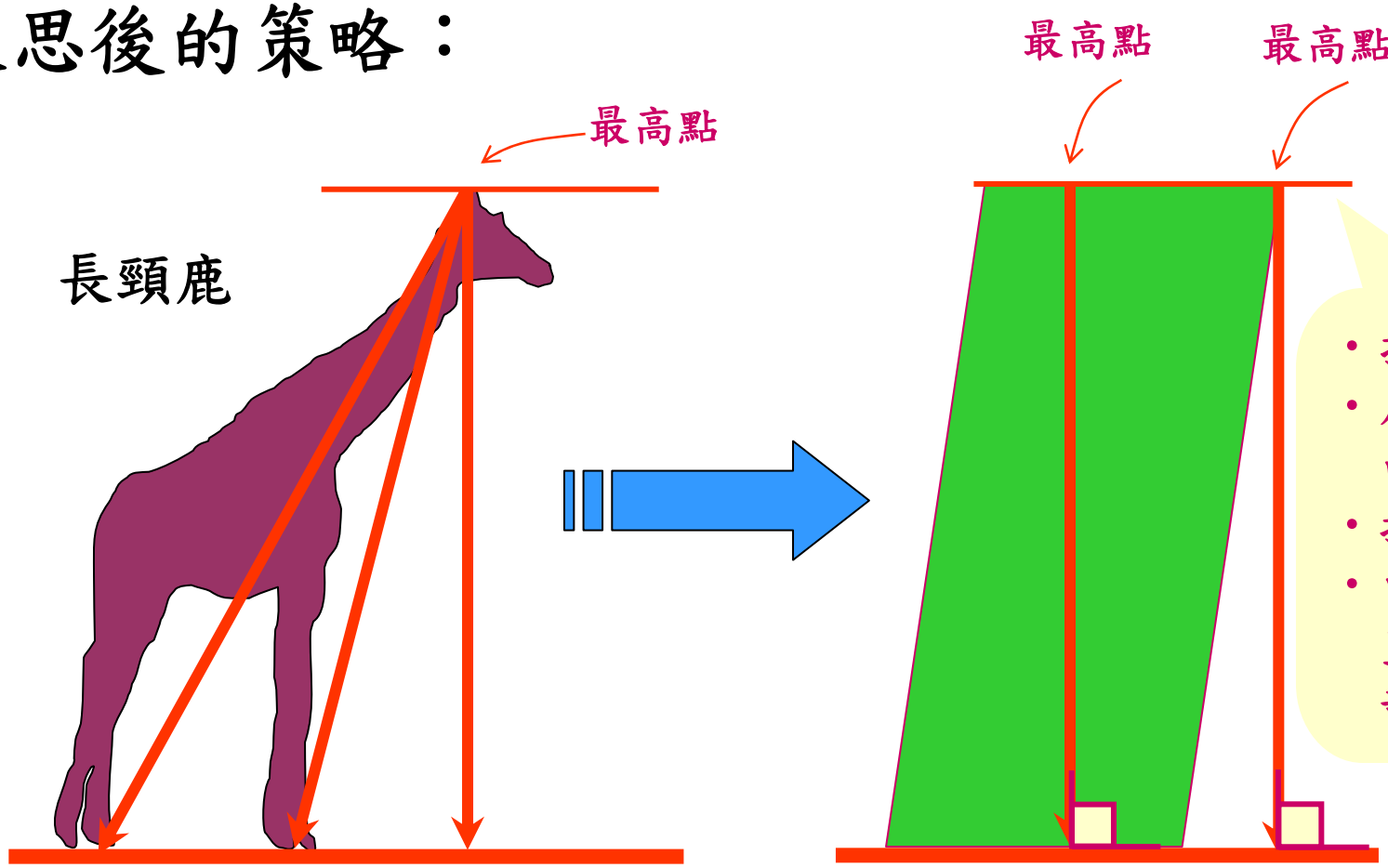
（三）認識平行四邊形的高和底

反思後的策略：



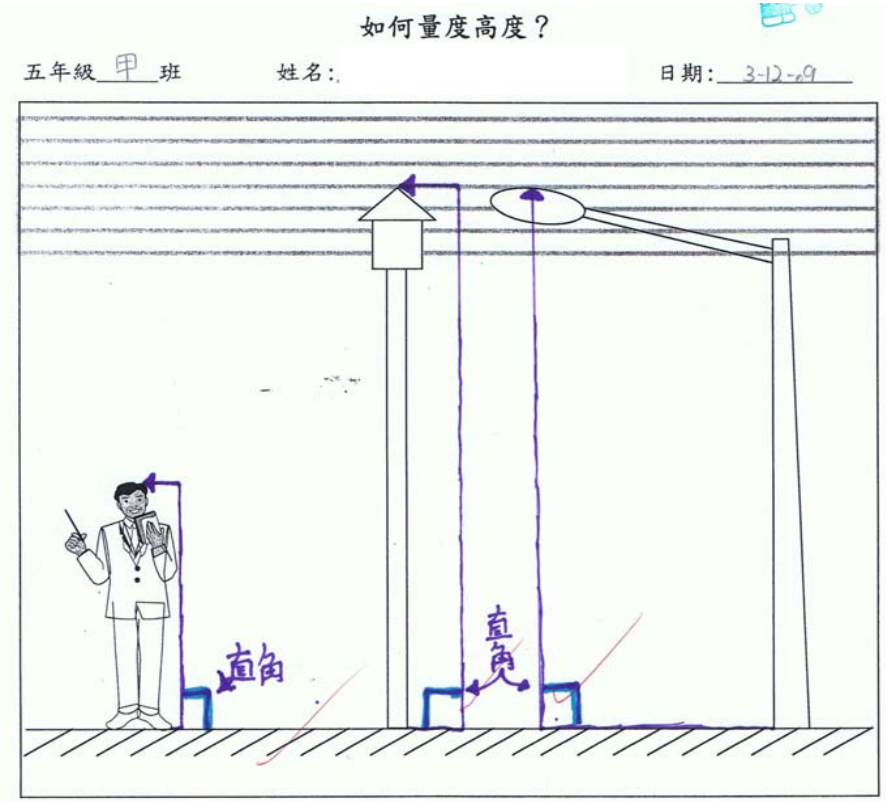
（三）認識平行四邊形的高和底

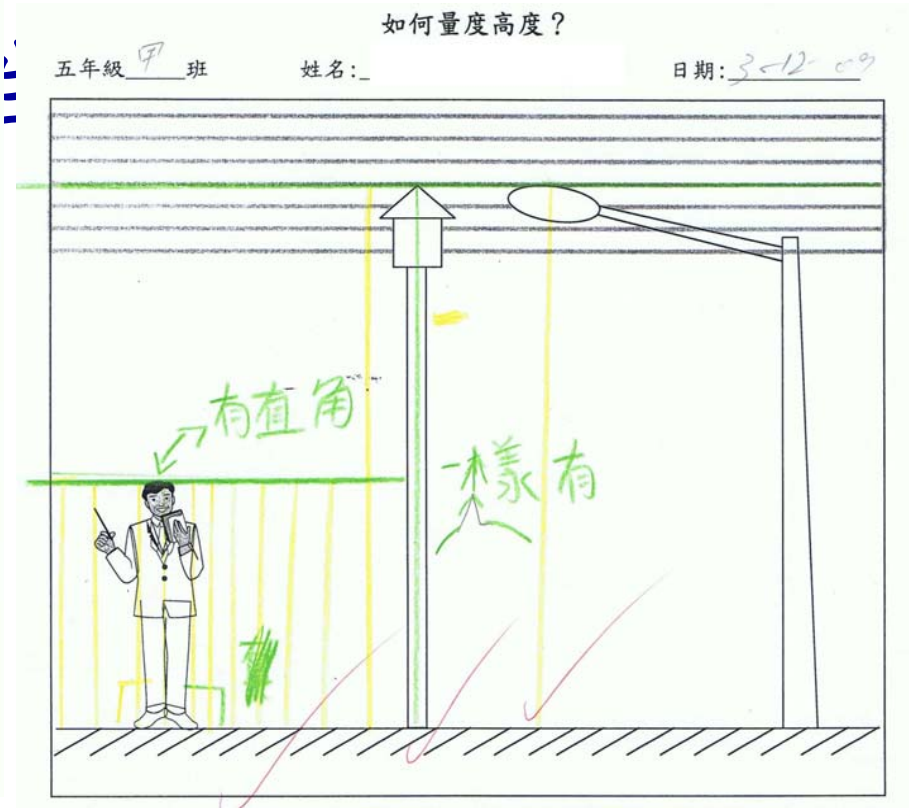
反思後的策略：

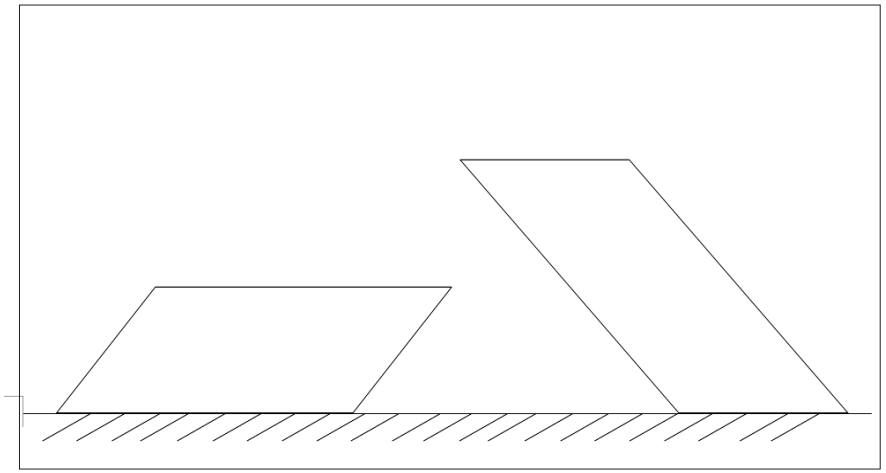


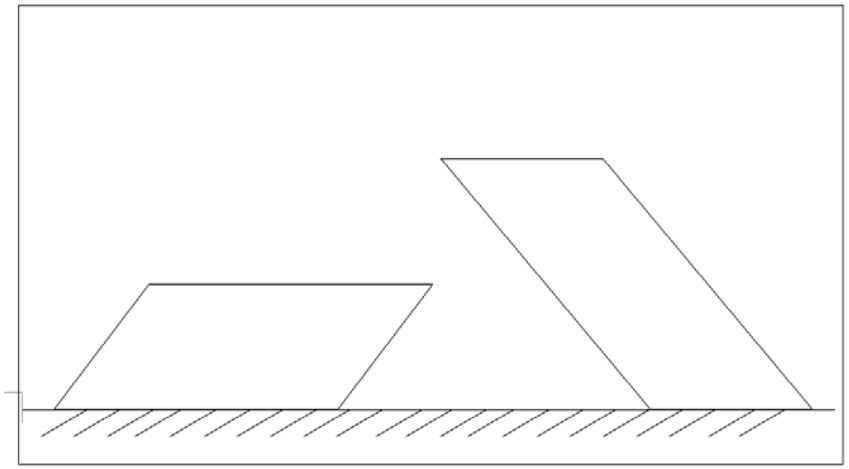
- 把圖形直立
- 底部貼齊地面
- 找出最高點
- 由最高點垂直量度致底部

（三）認識平行四邊形的高和底



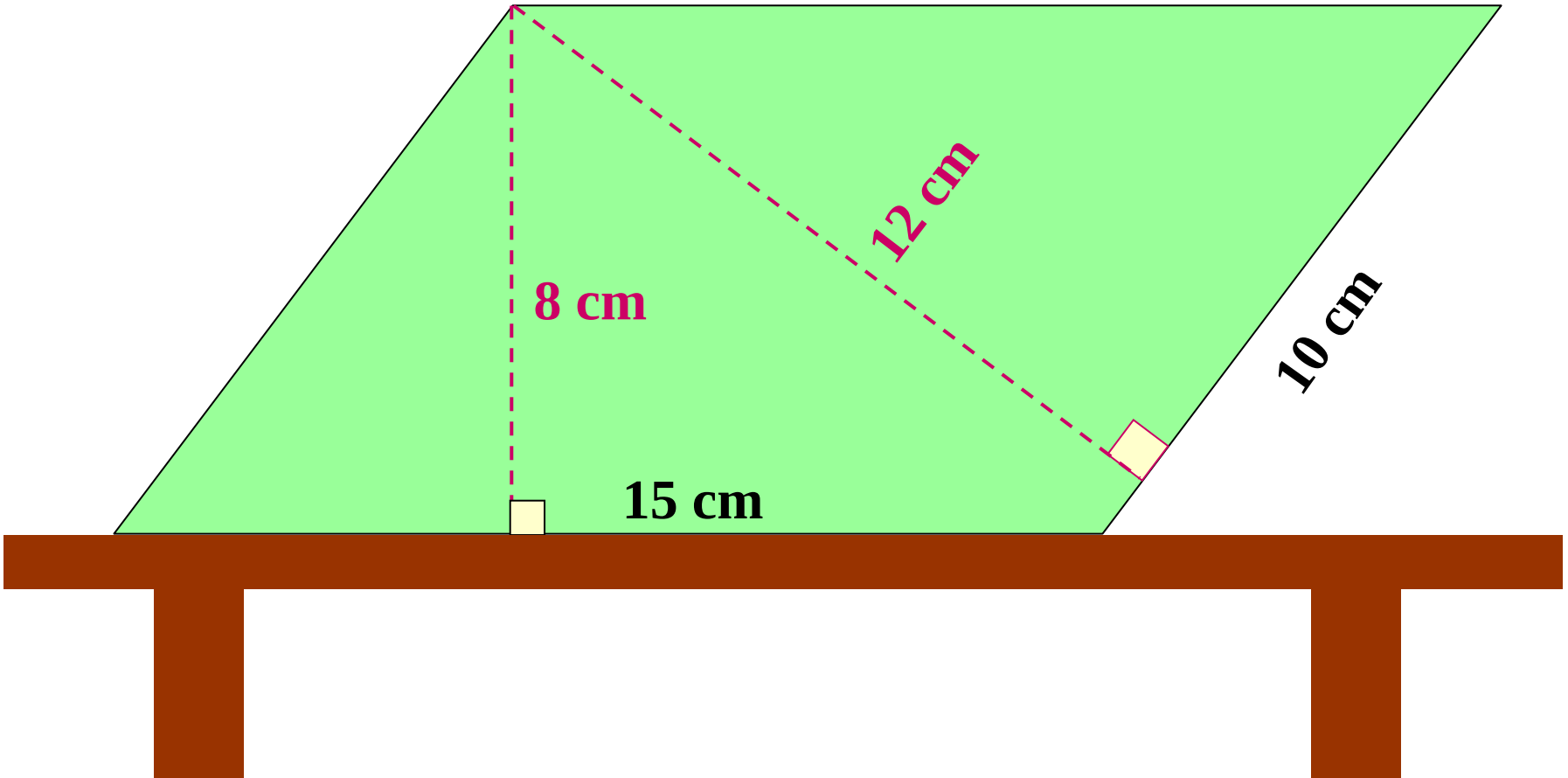






（三）認識平行四邊形的高和底

反思後的策略：

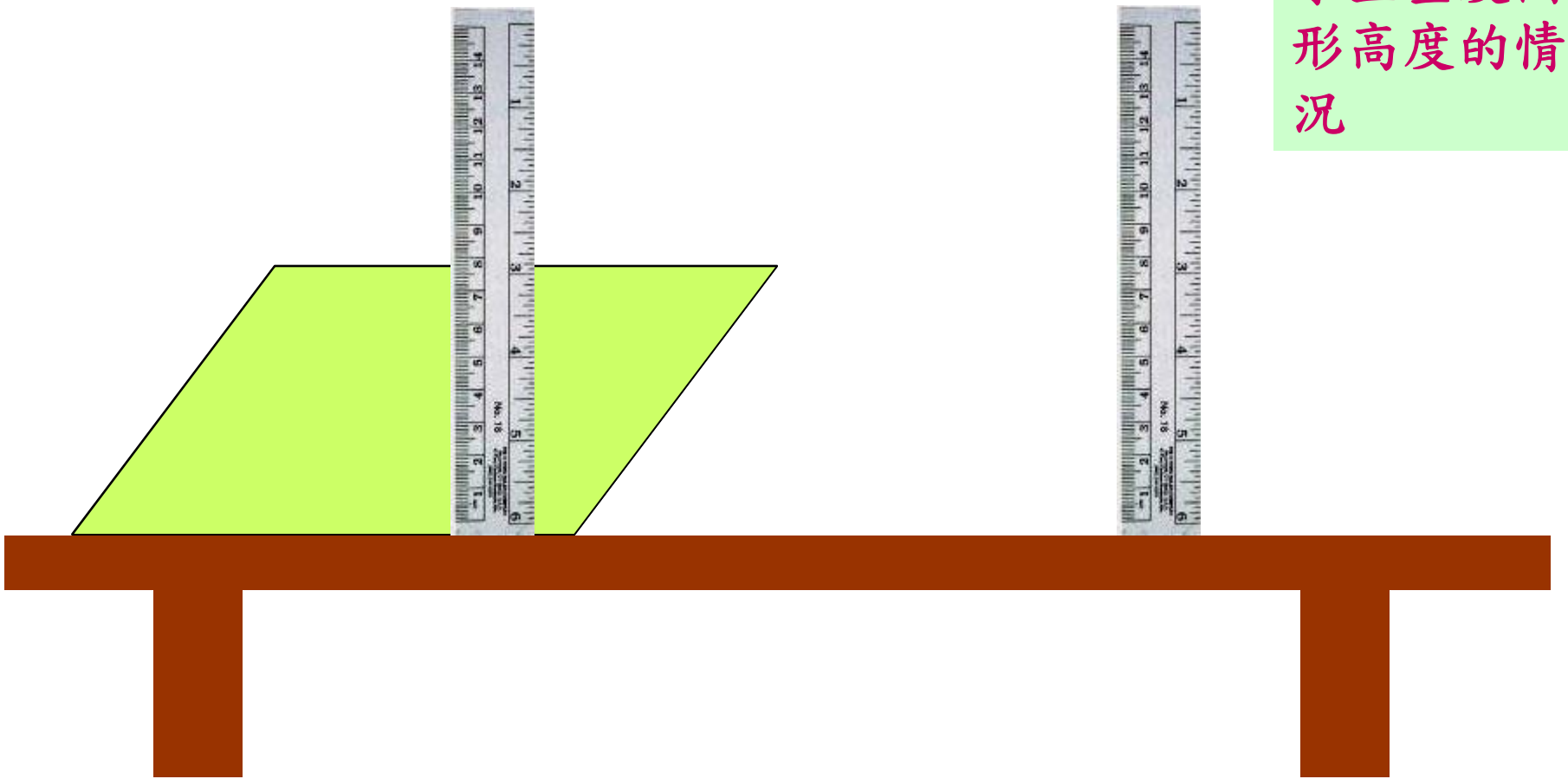


（三）認識平行四邊形的高和底

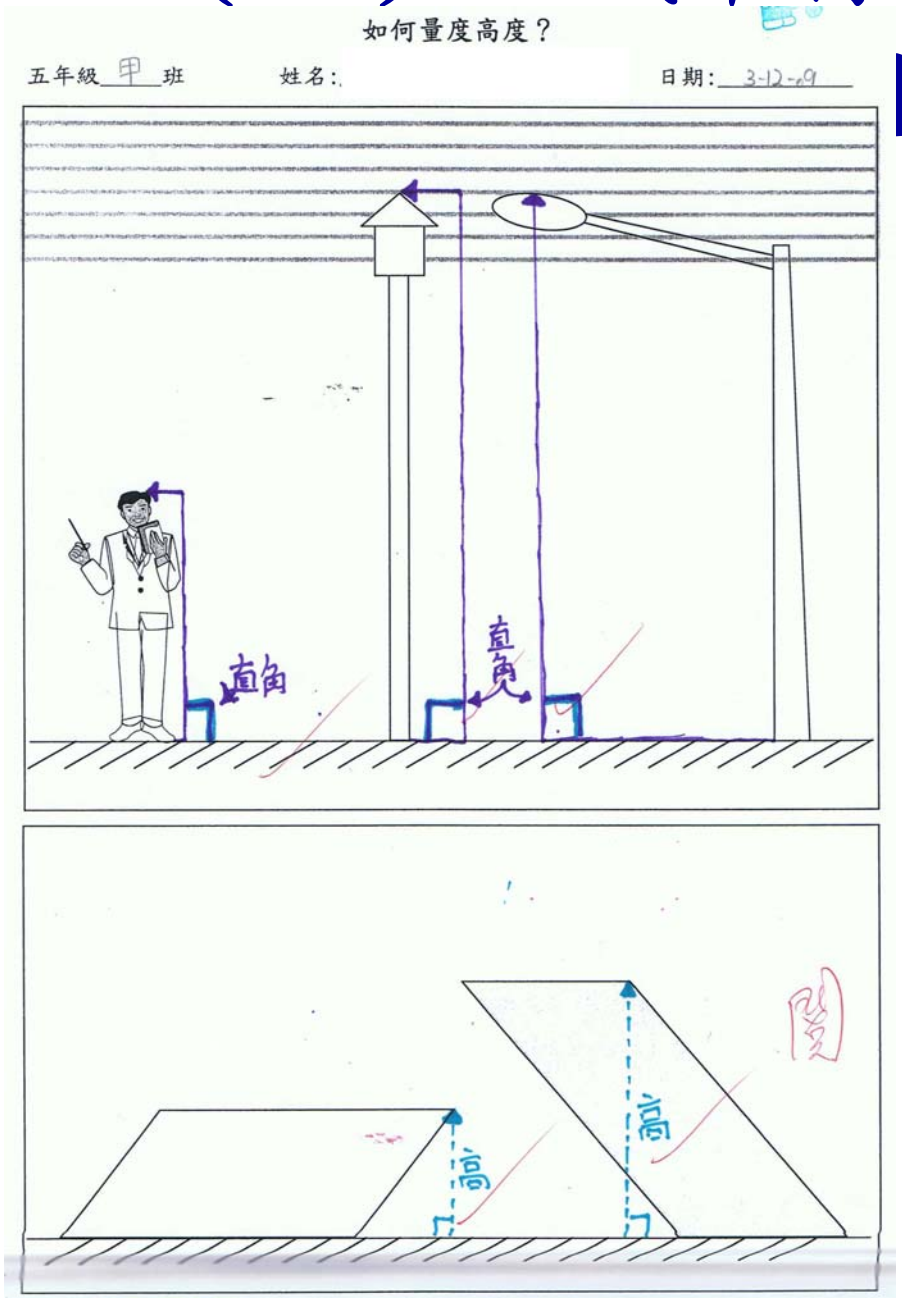
反思後的策略：

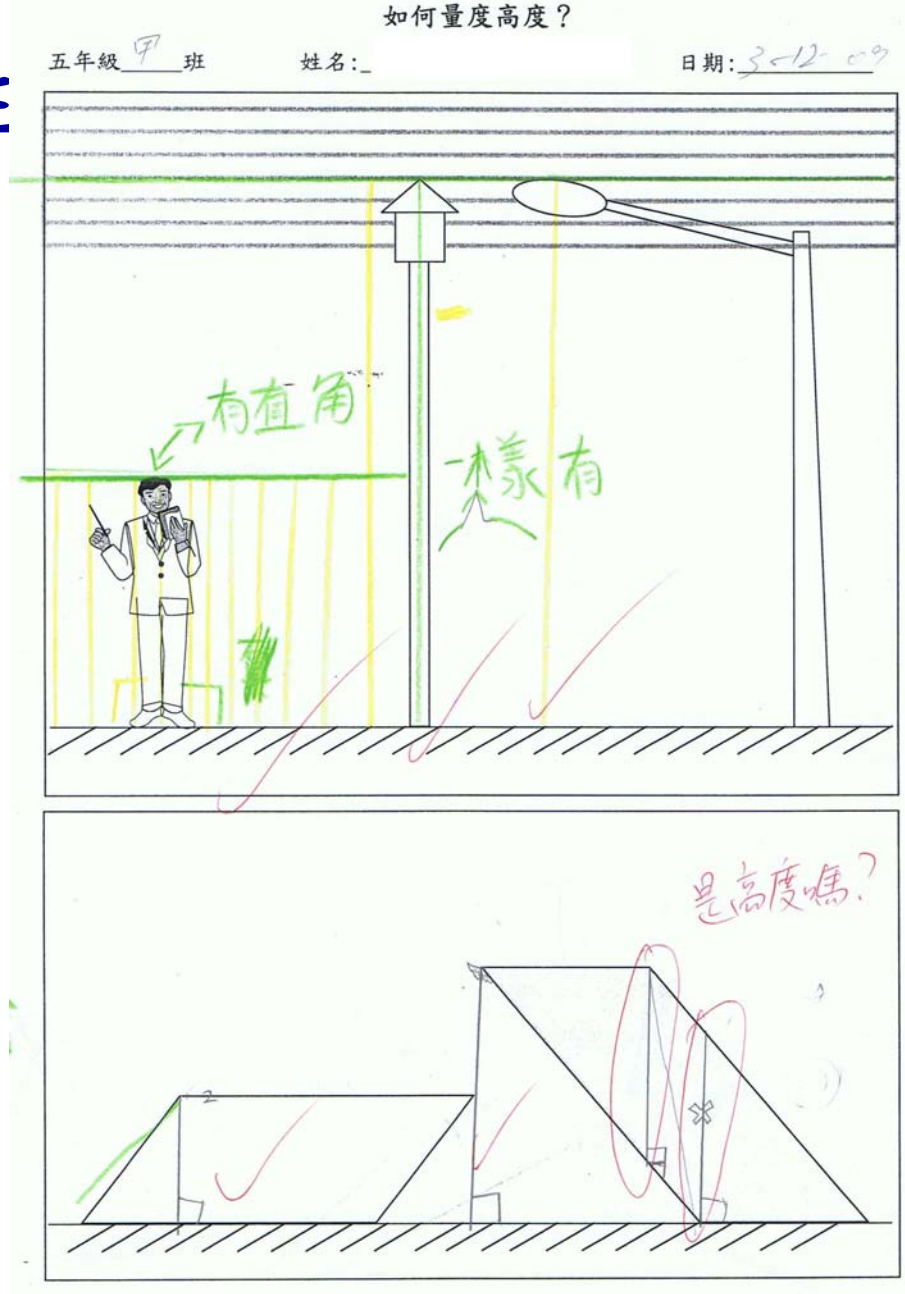
課堂片段 5

學生量度圖形高度的情況



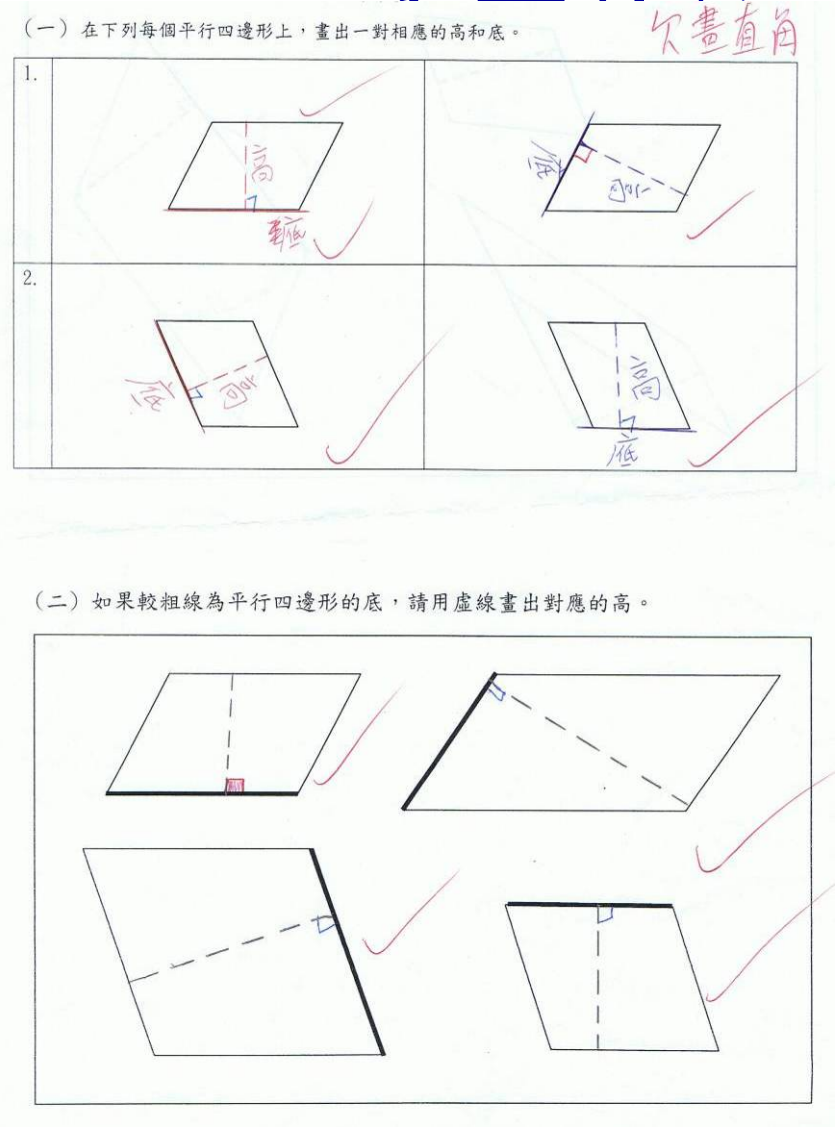
（三）認識平行四邊形的高和底





（三）認識平行四邊形的高和底

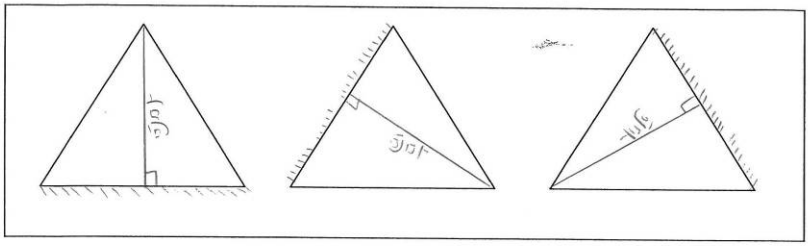
—學生作品



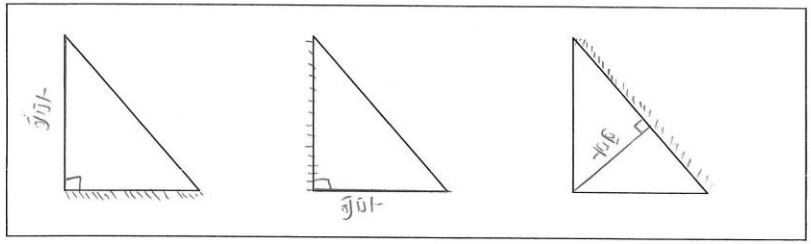
（三）認識三角形的高和底

討論題目:三角形有多少組對應的高和底?(提示:可用兩種不同顏色表示)
畫出下列三角形所有對應的高和底，每個三角形畫出一組高和底。

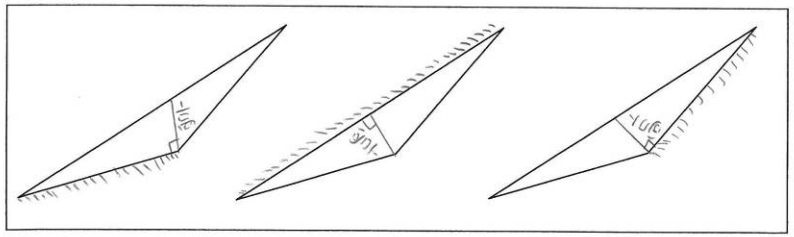
1.



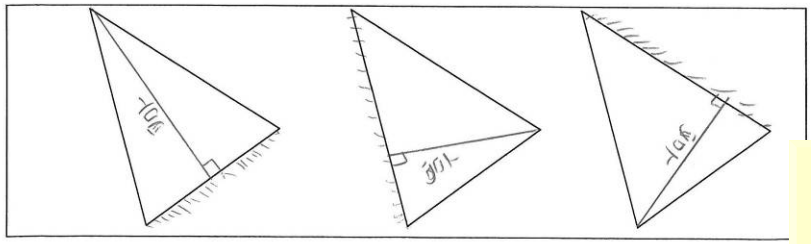
2.



3.

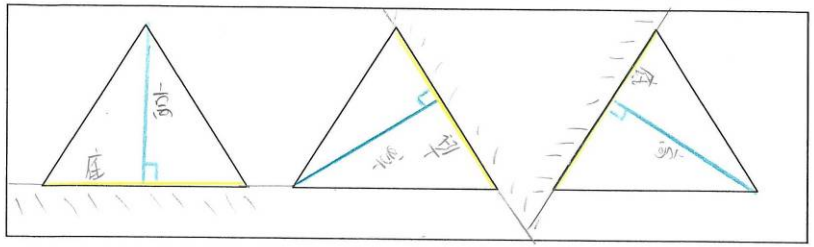


4.

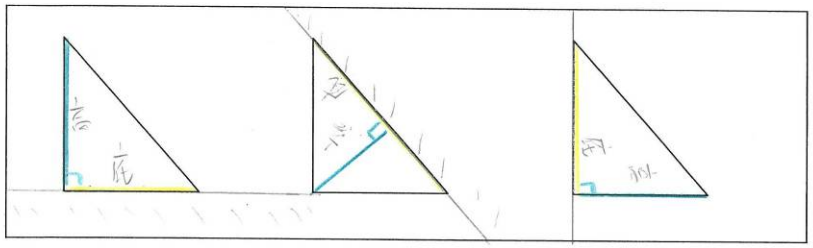


討論題目:三角形有多少組對應的高和底?(提示:可用兩種不同顏色表示)
畫出下列三角形所有對應的高和底，每個三角形畫出一組高和底。

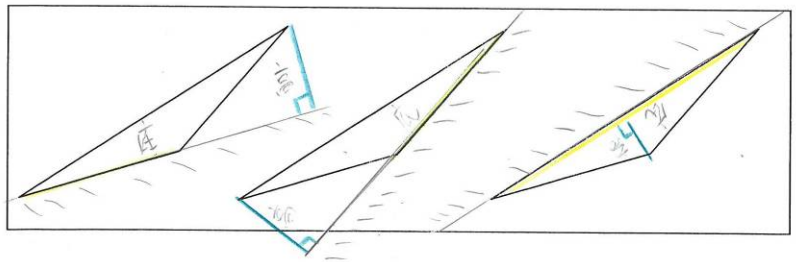
1.



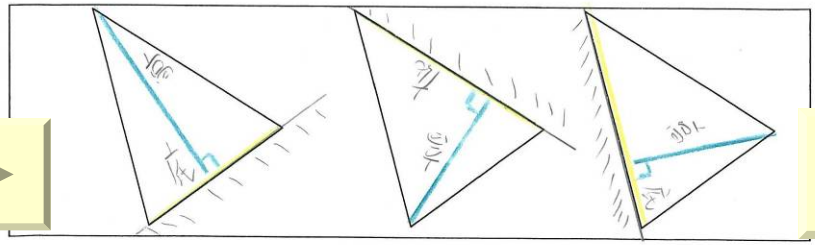
2.



3.



4.



學生訪談

學生把圖形摺起，有助找出圖形的高度。

總結

- 以探究式教學，讓學生多動手、多討論及多思考，能加強學生理解抽象的數學概念。學生能表達面積公式背後的意義，特別是三角形及梯形面積公式中「除以2」的原因，改善過往學生只是把數字套進公式的情況。從觀察中，學生背錯公式的情況較少出現。

- 培養學生自行探索的精神，讓學生仔細思考歸納及推理的過程，從而培養他們認真思考數學問題的態度。

- 對於高度（垂直線）不在圖形內的平行四邊形及三角形，學生較難明白，教師可從量度身高的經驗入手，把圖形直立，學生較容易觀察圖形的高度。

- 在計算圖形面積的運算題中，即使題目有多餘的邊長資料，學生較以往能找出對應的高和底，表現較以往理想。