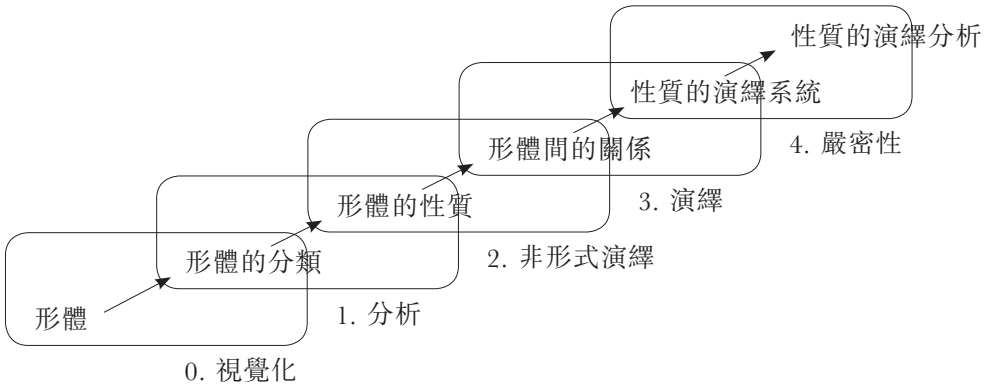
辨析不同三角形與四邊形的教學（小三、小四）

吳沛榮先生（高級學校發展主任）
葉婉兒老師、徐思茵老師、李靜文老師
（陳瑞祺（喇沙）小學）

Van Hiele的幾何思維階段

荷蘭數學家 Van Hiele 將兒童學習幾何的經歷分為以下五個階段 (Van de Walle, 1998)：

第0階段：視覺化階段 (visualization)
第1階段：分析階段 (analysis)
第2階段：非形式演繹階段 (informal deduction)
第3階段：演繹階段 (deduction)
第4階段：嚴密性階段 (rigor)



每一個階段的幾何思考創造出來的想法，會成為下個層級的概念或焦點
(John A. Van De Walle著，張英傑、周菊英合譯，2008，頁646-647)

第0階段的學生對圖形的辨析與命名是根據整體外觀的，對於圖形的特徵並不明確。第1階段的學生，能對圖形作出分析，學生能對圖形的特性加以定義(例如：菱形是一種四邊形，它的四邊都相等)，但是仍不能了解不同圖形類別之間的相關性(例如：正方形是「四角為直角的菱形」)。第2階段的學生能了解圖形關係分析，例如：學生能由正方形的性質推論出每個正方形為菱形，但他們不能進行證明。在是次分享會中，主要是涉及第0階段和第1階段的幾何思考。

值得注意的是，每一個階段是連續的，而學生在每一個階段的學習，是為了過渡下一個階段。因此，從0階段開始，學生必須要通過先前的階段，才能過渡及進入下一個階段，跳跨階段的思考是很少發生的，而階段發展與年齡無關，要進入下一個思考階段，幾何經驗才是重要的因素。

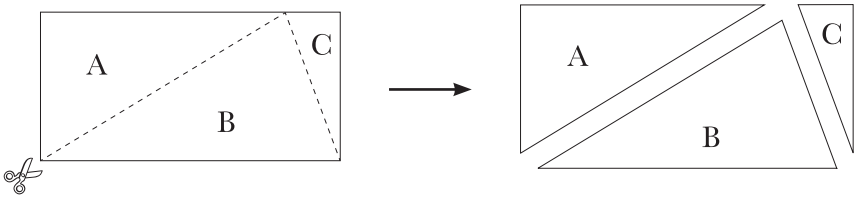
小一至小二平面圖形的學習

小一學生在學習平面圖形時，主要是透過直觀來辨認各種平面圖形，當中包括三角形、四邊形，五邊形、六邊形和圓形。當學生升上小二後，他們便學習認識一些常見的四邊形，包括長方形、正方形、梯形及菱形(香港課程發展議會，2000)，這時學生還是按著圖形的整體形狀來進行直觀辨認，學生在學習上不會產生太大的問題。為了幫助學生由**視覺化階段**過渡至**分析階段**，學生便開始學習分辨正方形和長方形相同和不相同之處，嘗試以圖形**邊的特性**(**邊長**)和**角的特性**(**直角**)進行比較，幫助學生開始觀察圖形的局部特性來進行圖形分類和分辨。

認識不同三角形的特性

然而，到了三年級，當學生要以**邊長**和**角的特性**來分辨一些特別三角形時，例如：直角三角形、等腰三角形、等邊三角形和不等邊三角形，情況就比較複雜，尤其是當這些三角形以非標準位置呈現時，學生必須按著其**邊長**或**角**的特性來進行辨認，不能再單憑直觀去分辨不同的三角形，否則便會很容易作出錯誤的判斷。

例如在以下2010年全港性系統評估的三年級數學評估卷中，學生對於辨認等腰三角形感到特別困難，全港的答對率亦只得37%，而當年的評估報告中，亦指出「學生在辨別等腰三角形方面，表現明顯較差，學生多以『不等邊 / 直角等腰三角形』作答」，其實在過去的系統評估中，不難發現學生辨認非標準位置的等腰三角形和直角三角形上，表現都較為遜色，這可能是由於部份小三學生，在辨認不同三角形時，還未習慣從不同角度觀察三角形**邊長**和**角**來進行辨析，而還是單憑**視覺**來進行判斷，以致在審辨過程中較容易出錯。



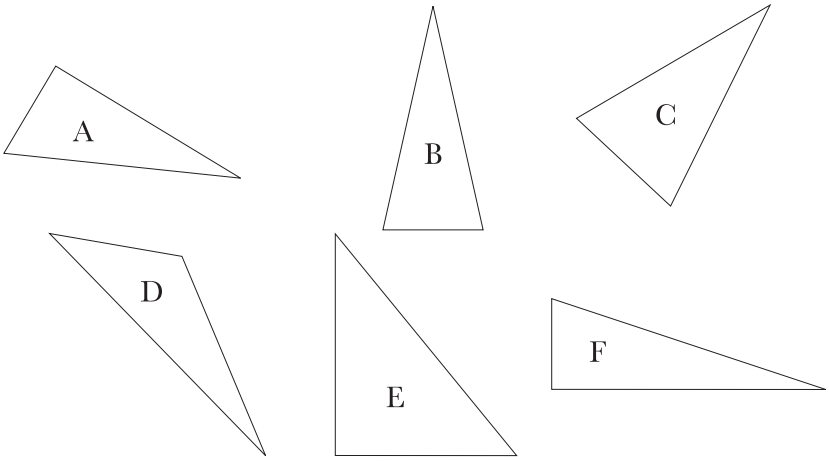
沿着虛線把上面的長方形剪開後，可得到三個三角形。
B是一個 _____ 三角形。 (2010 3MC2 Q31)

加強動手操作經驗，辨析不同三角形

為了解決這些學習問題，老師在教學上先多讓學生操弄不同類型的三角形，透過小組活動，引導學生留意邊長的特性，然後進行分類，讓學生建立如何以邊長分出不同類型的三角形的經驗，然後才進行命名。為了幫助學生辨認非標準位置的圖形，老師引導學生旋轉手中不同類型的三角形，透過操弄的過程，使學生能從不同角度觀察圖形邊長的特性。此外，老師還多鼓勵學生利用直尺來量度邊長，當學生遇上不肯定的情況時，尤其是判斷等腰三角形還是不等邊三角形時，便會以直尺來量度邊長才進行決定。

同樣地，在判別直角三角形與非直角三角形時，老師鼓勵學生多利用直角三角尺作為量度工具，讓學生進行量度三角形的角，作為判別的條件，由於直角三角尺本身就是一個直角三角形，學生以此作為量度工具，比較容易進行量度直角，減少因視覺的偏差而作出錯誤的判斷；然而，部份學生還是喜歡單憑直觀來進行辨析，當直角三角形以非標準位置呈現時，出錯的機會便較大，就如以下的工作紙，學生會誤以為圖形A沒有直角，而圖形C為直角三角形，因此老師還是要多提醒學生利用直角三角尺進行量度，以改善他們單憑直觀來進行判斷的習慣。

請根據指示，寫出所有代表答案的英文字母。



所有直角三角形：_____

最後，學生要學習從不同類型三角形中進行辨析，老師鼓勵學生先從邊長分辨，藉著旋轉手中的圖形進行猜測，然後再以量度進行驗證，若果未能決定，再以直角來進行辨析的過程，透過這個整合的過程，學生更有信心掌握不同三角形的特性和進行辨析。

在製作三角形中，由於學生對於繪畫非標準位置的三角形較為困難；為此，老師先引導學生利用釘板拼砌圖形後，才進行描繪，以建立學生不同類型的三角形的心靈影像，方便日後進行圖形在不同位置的繪畫。

認識各種四邊形的特性比認識各種三角形的特性更加困難

學生升上小四後，他們需要學習各種四邊形的特性，例如*兩組對邊平行*、*只有一組對邊平行和兩組對邊相等*，學生必須了解這些數學語言的意義，才能進行比較各種四邊形的特性，從而辨析不同的四邊形。由於要明白這些數學語言，學生需要較多的時間來進行一些圖形特性探究的活動，而老師亦要適當地引導他們以上述的數學語言來表達各種四邊形的特性，相對於不同三角形辨析的學習，學生必須要掌握及分析更多的資料才能辨析不同的四邊形，尤其是當學生要面對分別非標準位置或非規則的四邊形時，學生若果不能掌握各種四邊形的特性，只憑著

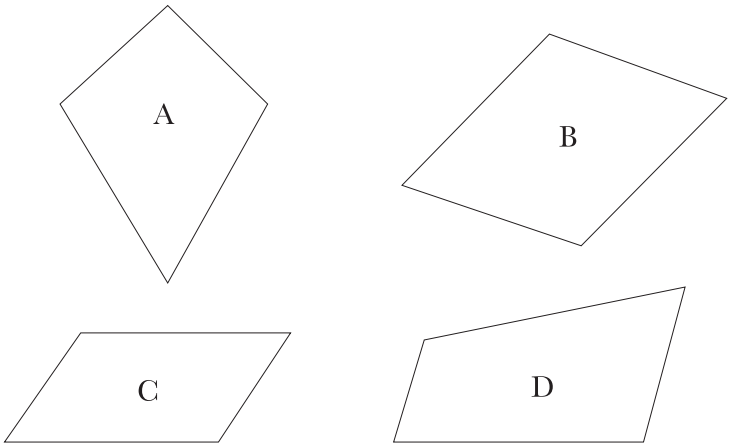
圖形的外形而進行猜想，便會弄至錯誤百出，不知所措。更有趣的是，當老師把不同的三角形和四邊形讓小四學生進行辨認時，學生竟然在三角形的辨認上出錯較多，反映出部份學生在小三學習有關課題時，仍然未能按著圖形特性來辨認不同的三角形，以致影響學生學習辨析四邊形的成效。

認識數學語言，探究各種四邊形的特性

為了幫助學生對四邊形的特性有深入的認識，更有系統地了解及分辨各種四邊形的特性，老師在學習內容和教學策略上，重新作出部署。一般來說，教科書的內容編排是認識每一種四邊形(例如：正方形、長方形、平行四邊形、梯形和菱形)的特性，然後藉著比較各種四邊形的特性，進行圖形的辨析的教學，所以學生必須先熟習每一種四邊形的不同特性，才能進行比較和辨析的學習過程，否則便很容易會產生混淆的情況，影響學習成效。

因此，老師先把有關的四邊形特性只限定為五種：*兩組對邊平行*、*只有一組對邊平行*、*兩組對邊相等*、*四邊相等和四角相等*，因為這些條件已足夠描述上述各種四邊形的特性，其餘的(例如：*兩組對角相等和對角線相等*)則按學生的能力逐漸附加上去。

另外，為了讓學生更容易認識各種四邊形的特性。老師把圖形認識的次序重新安排，以對比的方法，讓學生透過小組活動比較兩種特定的圖形以發現不同的特性，例如: 當平行四邊形與梯形作出對比時，學生便會發現平行四邊形有兩組平行綫，而梯形只有一組平行綫，而且平行四邊形的對邊是相等的，從對比圖形以至比較各種四邊形的過程中，學生會比較容易掌握各種四邊形的特性，而不用強記這些特性來辨析各種四邊形的特性。例如以下的工作紙中，學生透過圖形的比較，較容易認識平行四邊形的特性。



以上哪些平面圖形有兩組平行線？

_____

以上哪些平面圖形是平行四邊形？

_____

在整個過程中，老師嘗試幫助學生將一些數學語言與這些概念連結起來 (Anghileri & Baron, 1997)，以理解這些圖形的特性，期望使學生在面對各種四邊形在不同形態的表徵下，能夠聯想起這些圖形的名稱，而這時的學習，亦正好是培養幾何思維中的**分析階段**，學生若掌握得不好，將來便很難過渡至升中後所進入的**非形式演繹階段**。

另外，為了方便學生思考，在整個學習過程中，老師嘗試以流程圖的形式表列各種四邊形的特性，幫助學生以圖像思考，分辨各種四邊形的特性。

辨析各種四邊形

學生在學習過程中，其中一個難點是當一些四邊形圖形以非標準位置或非規則的形式出現時，學生有時會難以分辨，例如：學生會容易混淆一些偏側的梯形圖形為平行四邊形，把一個偏側的正方形為菱形等。為了解決這個問題，老師便運用幾何條和釘板來整作四邊形，除了幫助學生繪畫圖形外，亦引導學生從不同角度觀察圖形，加強學生對圖形的理解。為了幫助學生更有系統進行圖形辨析，避免只憑直觀去辨認不同的四邊形，老師把整個辨析過程分為圖形同類比較(標準位置、非標準位置、非規則圖形)、對比(例子與非例子比較)和整合的三個學習層次，而學生經過這些有層次的學習，對各種四邊形的辨析，掌握得更有信心。

在兩個課題的備課和商討中，陳瑞祺(喇沙)小學的老師在教學上嘗試強調以圖形**邊的特性**和**角的特性**引導學生學習不同的三角形和四邊形，除了幫助學生更有效地掌握各類三角形和四邊形的特性外，亦發展學生的空間思維。另外，學生在小組活動、遊戲和小組匯報中，亦多利用數學語言與同儕溝通，令學生能透過自己的語言整理學習的內容，加深了對各類三角形和四邊形的認識和印象。在這次分享會中，老師希望能透過課堂片段、學生習作和測考表現的分析，把三角形和四邊形的教學過程和反思與參與同工一起分享。

參考資料

1. Anghileri, J., & Baron, S. (1997). *Working with 3-D shapes-poleidoblocs*. Proceedings for the Day Conference held at University of Nottingham, Saturday 1st March ,1997.P.12-17.
2. Van de Walle, J. (1998). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally. 3rd ed. New York: Longman*.
3. 張英傑、周菊英合譯(2008)，Van De Walle著。《中小學數學科教材教法》。台北：五南圖書。譯自 *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. 4th ed. New York：Longman.
4. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。