「擬」目一新 — 自擬數學應用題的教學策略分享

曾倫尊博士 (高級學校發展主任)
鄭幗儀老師、梁潔儀老師、鄧露老師
(聖公會聖提摩太小學)

根據《數學課程指引》(香港課程發展議會, 2000)，小學數學科課程的宗旨包括：誘導學生理解及掌握數學的基本概念和計算技巧及發展學生的思維、傳意、解難及創造能力，老師普遍認為當中最難的是培養學生的解難及創造能力。在香港的小學數學課堂中，老師大多是以應用題的方式來教導學生解決問題的技能，目的是希望學生能透過解決以生活情境為題目的應用題，來建立他們的數學解題能力。然而在傳統教室中，上課的模式大都由老師提出課本中題目，與同學討論如何解題，引導學生解題的方式，再把解題的方法告訴學生，之後讓同學模仿老師的解題方法來完成工作紙或練習。由於當中題目的類型跟老師示範的問題相同，所以同學大多能進行練習，很快地熟練解題的技巧，可是老師卻無法真正瞭解學生的理解程度。在這樣的方式下，教授學生的只是機械性的操作理解，學生在解題上的思考模式被限制，缺乏靈活性及發展性。在這樣的教學方式下，學生若遇到不同類型或更複雜的應用題時，可能會運用錯誤的解題策略，正如：Sowder (1988) 提出能力一般的學生較常使用的策略為「使用最擅長或是最近才教的運算法」、「由數字大小來決定運算符號」、「將所有運算都試過再選出最適當的答案」、「利用關鍵字」、「先猜測答案是大(用乘、加)或小(用除、減)」等不同方式。

近年來有許多學者提出應改善學生數學思考的能力，以培養學生主動建構知識，使學生可以從自行建構的過程中學習數學 (Brown & Walter, 1993；English, 1998；Silver, 1994；Freire, 2001；梁淑坤, 1994)。美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics (NTCM))認為擬題是數學課程中最有啟發性的活動，是現今數學課程不可缺少的活動 (NCTM, 1989;1991)，更倡導老師應該製造機會讓學生在問題情節中探索和形成問題，進而主動擬題，並按問題之條件修正新的題目，以培養學生自學及自省的精神，最後老師在評量學生的擬題時，還可從中瞭解學生理解課題的程度 (NCTM, 1995)。

擬題已經受到老師的注意，並認為發展的焦點為訓練學生的逆向思考，對於此理念，聖公會聖提摩太小學的老師均認為若要學生掌握良好的解題能力，必須培養學生有足夠的擬題能力，然而解題和擬題能力的培養並不容易，我們在第一年的擬題活動觀課，老師以慣常使用的模仿法來帶領同學擬題，學生擬出的應用題之問題結構的難易度是不受限制的，同學會傾向擬出結構較簡單的問題。例如：在以模仿法的擬題學習中，老師慣常給予學生常見的比較應用題，讓學生參考，於是語文能力較高的學生便能合理地擬出簡單的比較應用題；然而能力稍遜的學生可能只能模仿擬出應用題，卻不能判斷是否合理，就如學生擬出的問題剛好是題目內給予的資料:

例1: 小明有250元，小強比小明多200元，問小明有多少元?

學生亦會擬出不合理的情況而不知如何是好:

例2: 小明有250元，小明比小強多300元，問小強有多少元?

對於模仿結構較為複雜的比較應用題，學生可以成功模仿到的只有某種簡單的題型，但較為困難的題型，學生可能會難於理解，更遑論仿作。為此，對於能力較高的學生，如果於擬題學習時，總是擬出自己熟悉，或是只能擬出結構簡單的題目，學生從中的得益則甚少，對於解複雜的比較應用題似乎幫助不大，但要學生理解並擬出結構較為複雜、自己較不熟悉的題型，又可能會造成學生學習困難。因此老師反思觀課的成效，我們相信同學對題目的結構缺乏理解，認為應從解難教學及合作學習兩方面，以全面改善不同能力學生擬題的效能。

擬題與解題

老師們相信若能利用擬題教學緊扣解難教學，便能幫助學生提升解難能力，尤其在現今建構主義的影響下，學生不能只是被動的接受知識，而是需要主動地經由感官或溝通等方式建立知識 (Von Glasersfeld, 1995)，因此學生除了懂得解題及討論各種解題方式外，學生應有機會從特定的情境擬出問題，並能適當地揀選條件來建構更複雜的問題，正如匈牙利的數學家 Polya (1945) 強調「擬題和解題是相連性的活動 (Brown & Walter, 1983)」; 既然擬題與解題在數學教育中有着密不可分的關係，老師於是參考他的《怎樣解題》一書中談到解題的四個階段：首先了解題意，然後擬定計劃，再執行計劃，最後回顧答案。然而在這樣的解題四階段中，學生只需負責把答案解出來，並不需要理會題目是否有誤，於是老師在解難教學時刻意將題目的結構組織詳加分析，讓同學初步理解某類型題目的特有結構，到擬題教學時，又參考 Leung (1993) 根據 Polya 以上所提出的解題四階段，改成擬題四階段：首先了解擬題的題型，然後策劃擬題，再計算答案及回顧所擬出題目是否合理，希望在擬題教學中運用，以達到 Silver & Cai (1993) 提出的讓擬題活動發生於解題前、解題中、解題後。Silver (1994) 亦提出擬題於數學教育上是數學訓練與思考的中心，並整理出擬題的特徵與重要性如下：

1. 擬題的教學特徵就像是一種探索式教育；
2. 是提升學生解題能力的方法；
3. 是讓學生瞭解數學的窗口；亦是讓老師瞭解學生是否瞭解的窗口；
4. 是增加學生學習數學動機的方法；
5. 可以幫助學生成為一個有自主學習力的學習者。

這個擬題的特徵跟解難的特徵亦相當接近，如果學生能同時為解題者及擬題者，便可以清楚的掌握題目的意思與內容，學生在解題時可直接進行策劃解題活動，而在解題過程中，學生亦會激發創造出更新更好的題目來，經過擬題四個步驟不斷循環之下，學生會思考自己所想出來的題目是否合理。透過執行、回顧再修改題目、重新擬題，於是解題、擬題的活動彼此相輔相成，使得學生能透過這樣的過程增加對數學概念的深層認識與釐清。

縱向課程設計

老師們均希望擬題活動能發生於解題前、解題中及解題後，然而擬題是指學生根據老師所給與的條件，然後用自己的想法，想出一個數學題目。Stoyanova & Ellerton (1996) 將擬題定義為一段學習歷程：學生以學習解題的經驗為基礎，透過解構常見的數學題目，來建構及創造有意義的數學題目，即是使學生在學習解題時將知識內化後，重新在擬題時演繹學習的過程。當學生進行擬題時，必須取出原本舊有的數學知識與新經驗做結合，再用自己的生活經驗把情境、人物、事件、數字、圖形等建立關係並組織起來，之後輸出文字而擬出問題。從學生親自操作的過程中，促使他們深入理解一道題目的組成架構，改變面對題目時的態度及思考方式，並建構起解題的知識。基於這樣的想法，老師們認為必須在不同年級的縱向課程中螺旋式滲入及鞏固以上所提解題及擬題教學，並需要理解各階段學生對不同類型問題解題的認知發展，適時解構不同比較應用題的結構，尤其是句子之間與問題的關聯，並在指定的題目中，令學生再產生一道新的問題，讓學生更深入了解相同類型的題目，以真正理解問題，然後才引入擬題教學，讓學生於課堂上做擬題學習，循序漸進地提供不同問題結構的擬題鷹架，以幫助及引導學生擬出結構較複雜的問題。

鷹架最早由 Wood, Bruner, 和 Ross (1976) 所提出，他們描述了老師及學生在思考如何建造出一個木製金字塔之間的互動過程，稱為「鷹架」的過程。在這個過程中，老師輔助學生達成目標，會較學生獨自一個人解決問題更好。近年來 Roy (2004) 整理了許多對鷹架的探討，他指出鷹架之目的，在於提供輔助的過程，也就是不管是透過老師或同學的幫助，又或是工作紙內容設計的幫助，這個鷹架最好是能夠以明白且自然的方式包裝起的教學內容，並且可以完整的透過鷹架傳遞出教學內容。聖公會聖提摩太小學老師們參考了以上各學者提出關於緊扣解難教學及擬題教學的方法後，嘗試在縱向課程設計上強化學生對應用題結構的理解，在小一至小三比較應用題的縱向教學中，嘗試運用合作學習及鷹架教學設計，令學生加強理解應用題結構，並以此貫通各級學習活動的設計。兩年的共同備課中，經過多次研課、觀課及不斷反思改良，累積了一些鷹架教學設計的經驗，希望透過分享會與其他老師交流。以小一至小三的比較應用題鷹架教學設計為例，老師認為學生需清楚理解比較語句，於是在小一初接觸比較語句時，便以實物操作輔助，讓學生運用一一對應的方法，比較兩組物件的多少，然後造出比較語句，例如:「星星比月亮多」及「月亮比星星少」，從而理解比較語句中哪一項是多或少。當學生掌握比較語句的構造後，便讓學生二人一組按活動情況，輪流說出不同的比較語句，並互相核對。小一下學期，學生初步接觸比較應用題前，老師會刻意透過遊戲讓學生由對比較語句的認識，過渡到比較應用題，從而進一步理解比較應用題的結構。

到二年級，老師設計的擬題訓練分為數個階段。由於應用題是以已知與未知條件所組成，然而於已知條件中又包括了原本條件、改變條件與未知條件。因此學生於學習自行擬題前，首先要理解不同條件之間組合上的邏輯，而這部份亦涉及學生的語文能力，使用鷹架填空方式的訓練較為合適，即是將一道比較應用題挖空為半完成品，讓學生自行觀察前後句子的關係，再將題目填充完成。在鷹架設計上，由於主要是以擬題來學習解題的概念，因此老師在設計上亦以解題的概念為出發點，因為擬題是一種逆向的思考，所以老師需找出解題與擬題兩者之間的關係，以建立鷹架設計背後的意義。於是老師在上學期講解比較應用題時，首先將文字題轉化為三個抽象句子，將句子分析為原本條件、改變條件與未知條件。讓學生瞭解三個抽象句子後，以合作擬題方式，採用四人一組，首先由一位學生擬定數學題目的第一句，再讓第二位同學接力擬定數學題目的第二句，如此類推，以完成整道比較應用題，最後由各組員按準則共同訂正修改並計算。最後老師會公開讓全班學生給予建議，令擬題同學有機會修正所擬的題目，並透過整個過程釐清有關的數學概念。此鷹架的方法分成「原本條件」、「改變條件」、「問題目標」三個部份，因此鷹架的部份亦以此三個部份來卸除。最後在三年級全部卸除，希望由小一至小三設計出來的鷹架，除了可以幫助學生學習擬題外，還可以幫助學生建立擬題與解題之間的關係，讓學生可以更直接地感受到自己所擬題型的意義及學習擬題的目的。

聖公會聖提摩太小學的老師希望透過這次校本經驗分享，分析比較應用題的解題及擬題教學活動，探討擬題的鷹架教學在小一至小三的縱向課程，對學生學習所產生的影響，以瞭解學生在進行合作擬題及個別擬題時所遇到的問題。觀課所見，在合作學習中同學雖然只擬出題目中的一句，但卻照顧了不同能力的同學，完成後他們會一起逐句讀出，並運用老師定出的準則，先自行判斷自擬題目句子之間的關係及其合理性，最後將其轉化為數學算式，於計算後得到答案，再判斷不同組別同學的自擬題目。在運用合作學習，各組互相判斷自擬題目時，對於簡單的比較應用題，同學都能作出正確的判斷，到個別擬題時，便能駕輕就熟，然而進一步到處理牽涉兩層較複雜的比較應用題時，同學們起初只運用舊有判斷一層比較應用題的方法，往往顯得為難，容易判斷錯誤，當有個別組同學一邊逐句理解，一邊運算作為驗證，便能準確判斷自擬題目是否合理，及判斷其他組別的題目。整個教學過程令老師非常欣喜，確信他們刻意將解題教學緊扣擬題教學，並運用鷹架的設計貫串小一至小三課程，令同學更深入理解較複雜比較應用題的結構，從而直接幫助同學解難。

參考資料

1. Brown, S.I. & Walter, M. I. (1983) *The art of problem posing phiadeiphia, PA: Franklin Institue Press*.
2. Brown, S.I, & Walter, M. I. (1993). *Problem posing: Reflection and application*.
3. English. L, D. (1998). Children's problem posing within formal and informal context. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106. Hillsadle, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
4. Freire, P. (2001). Pedagogy of the Oppressed. From http://books.google.com/books?hl=zh-TW&lr=&id=xfFXFD414ioC&oi=fnd&pg=PA9&dq=Pedagogy+of+the+Oppressed&ots=sWMb86kYXg&sig=Ej9GX_yFJ3b5Y7Aq-JbbIKYqWVU
5. Leung, S. S. (1993). The relation of mathematical problem posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content. Doctoral dissertation, University of Pittsburgh.
6. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston*, VA: Author.
7. National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston*, VA: Author.
8. National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston*, VA: Author.
9. Polya, G. (1945). *How to solve it*. (2nd ed.). New York: Doubleday.
10. Roy, D. P. (2004). The Social and Technological Dimensions of Scaffolding and Related Theoretical Concepts for Learning, Education, and Human Activity. *The Journal of the Learning sciences, 13(3), 423-451*.
11. Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing, *For the Learning of Mathematics, 14(1), 19-28*.
12. Silver, E. A., & Cai, J. (1993). Mathematical problem posing and problem solving by middle school students. Paper presented at the annual meeting of the American Educational research association, Atlanta, GA.
13. Sowder, L. (1988). Choosing operations in solving routine story problem. In R. I. Charles (Ed.), *The Teaching and assessing of mathematical problem solving*, 148-158. Hilsdale, NJ:Erlbaum.
14. Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
15. Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism a way of knowing and learning. London: The Farmer Press*.
16. Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines*, 17, 89-100.
17. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：香港印務局。
18. 梁淑坤(1994)。「擬題」的研究及其在課程的角色。《國民小學數學科新課程概說(低年級)》。台北：台灣省國民學校教師研習彙編。