從立體看平面，從平面看立體

周偉志先生（小學校本課程發展組）
陳泉勝老師（旅港開平商會學校）
周錦鋒老師（旅港開平商會學校）
張盛孝老師（旅港開平商會學校）
黎璧茵老師（旅港開平商會學校）

問題討論：

立體由平面構成，為甚麼小一學生是先學立體後學平面，而不是先學平面後學立體的呢？

在小一時，學生已從直觀中認識立體及平面圖形，為甚麼在小二時，又要再從直觀立體圖形中認識面呢？

兒童幾何思維發展的五個階段：

階段零：認識（recognition）

兒童會根據圖形的整體外觀認識圖形，而不考慮它的部分。

例如：在小一的立體圖形中，學生從直觀分類中認識圖形的名稱 。

階段一：分析（analysis）

兒童能分析圖形的簡單特性，但不能看出圖形間的相互關係。

例如：在小一中學生需描述圖形的簡單特性。

階段二：關係（relationships）

兒童能以圖形最少的特性加以定義及分類。

例如：在小二中學生以「面」來了解及比較柱體及錐體的簡單特性。

階段三：演繹（deduction）

學生能利用演繹及推理來證明各種幾何問題。

階段四：定理（axiomatics）

學生能了解及比較不同的幾何系統。

如何提升兒童的幾何思維能力？

A　多閱讀

B　多做練習

C　屬先天性

D　隨年齡自然增長

E　多作操作活動

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.

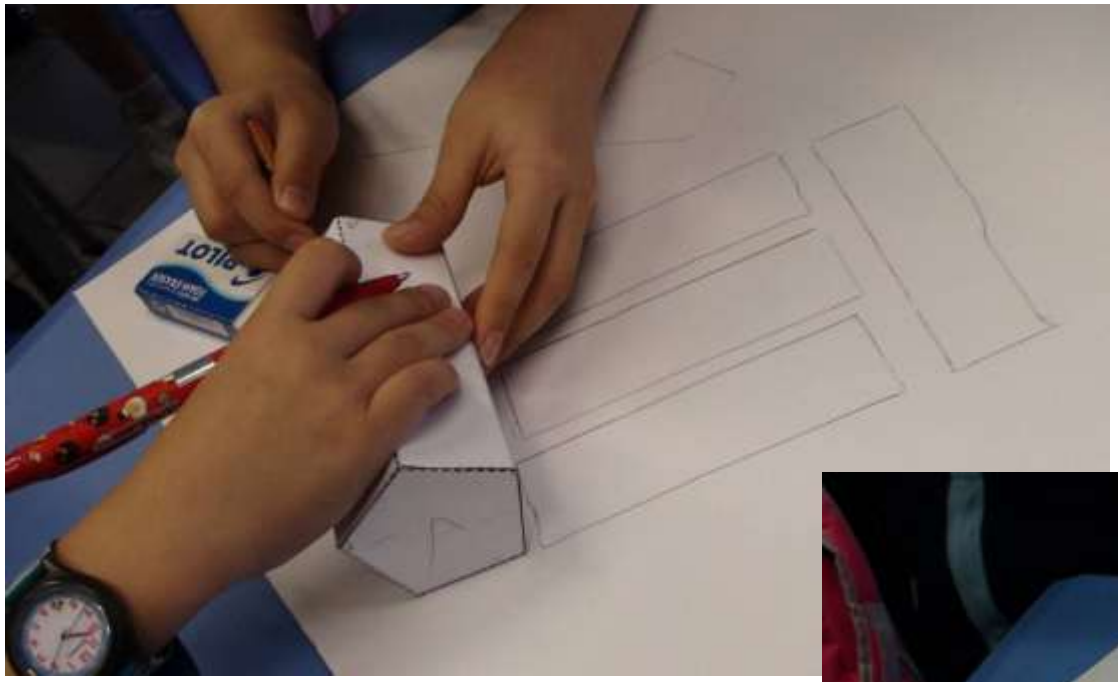
Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: W. W. Norton.

小二　從立體看平面

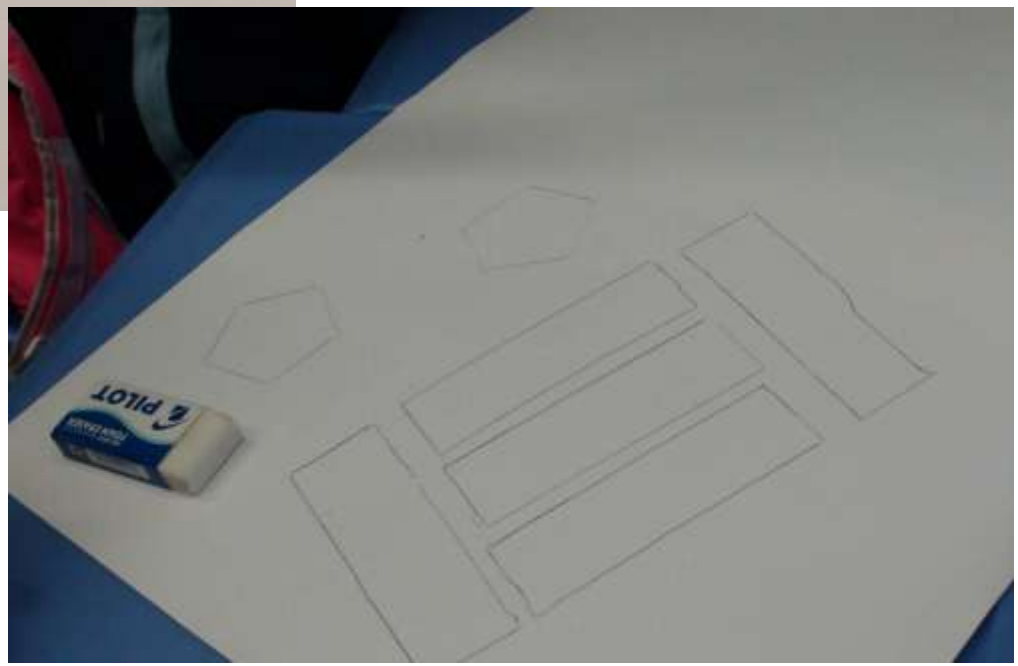
我們期望：
讓學生通過實物操作，印出柱體和錐體的面，作出歸納及比較，從而了解它們的特性，並以數學語言描述。

思考問題：
為何要讓學生從操作活動中建立概念？
如何安排活動以達致學習成效？

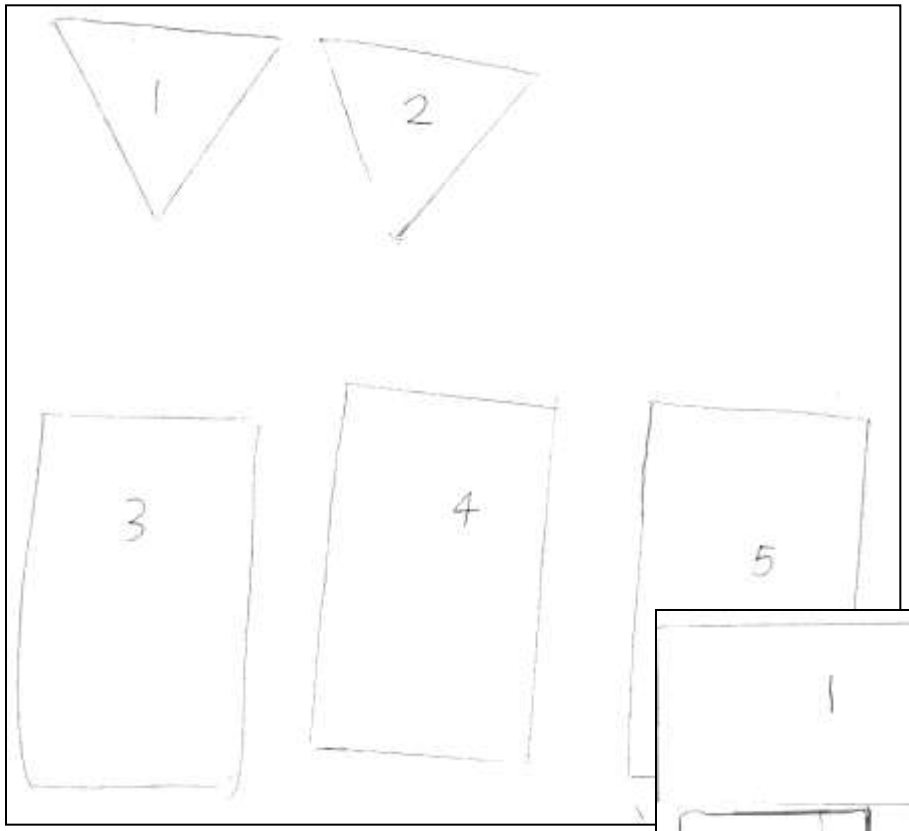
活動一：
不同角柱的面有甚麼相同及不相同的特性呢？



學生如何
合作？

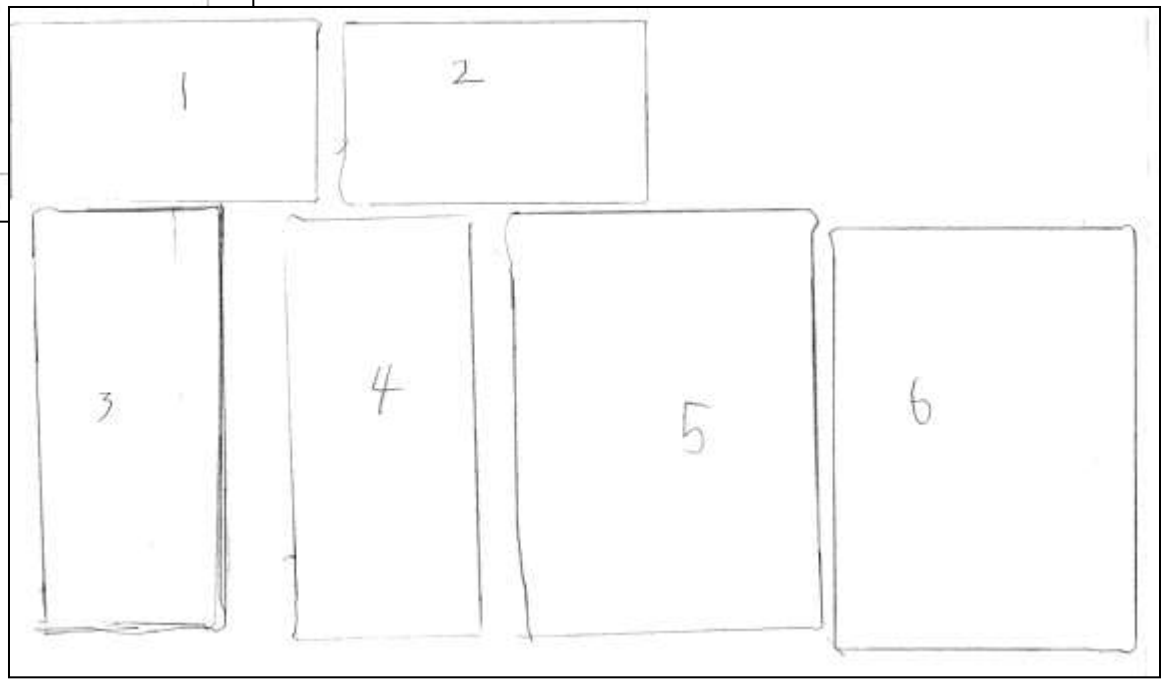


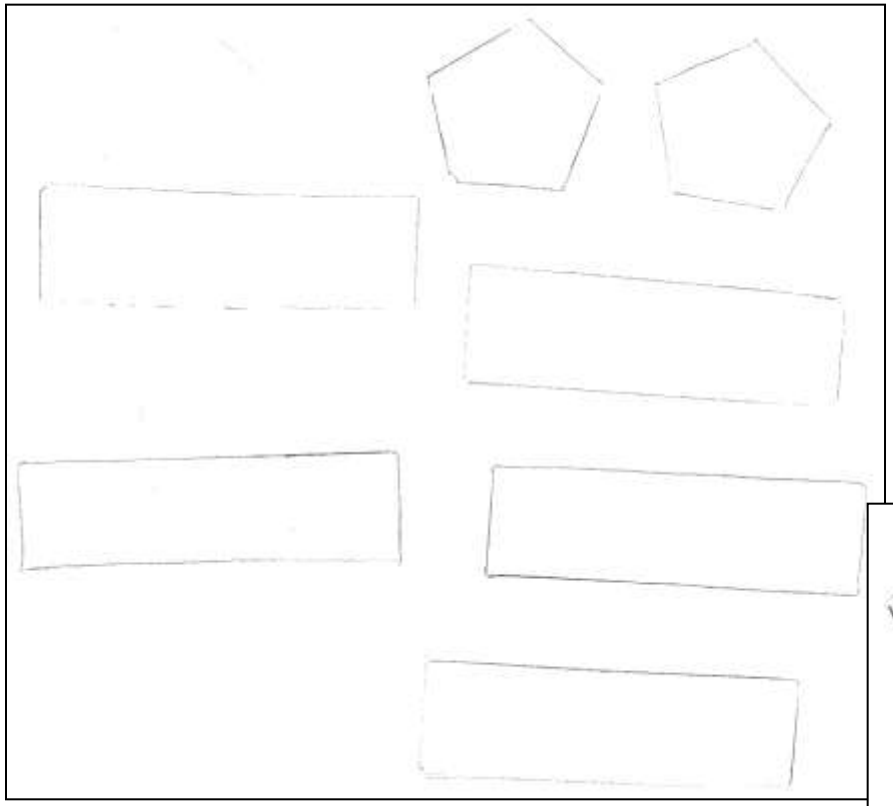
如何避免重
覆印面？



學生印出
三角柱體的面

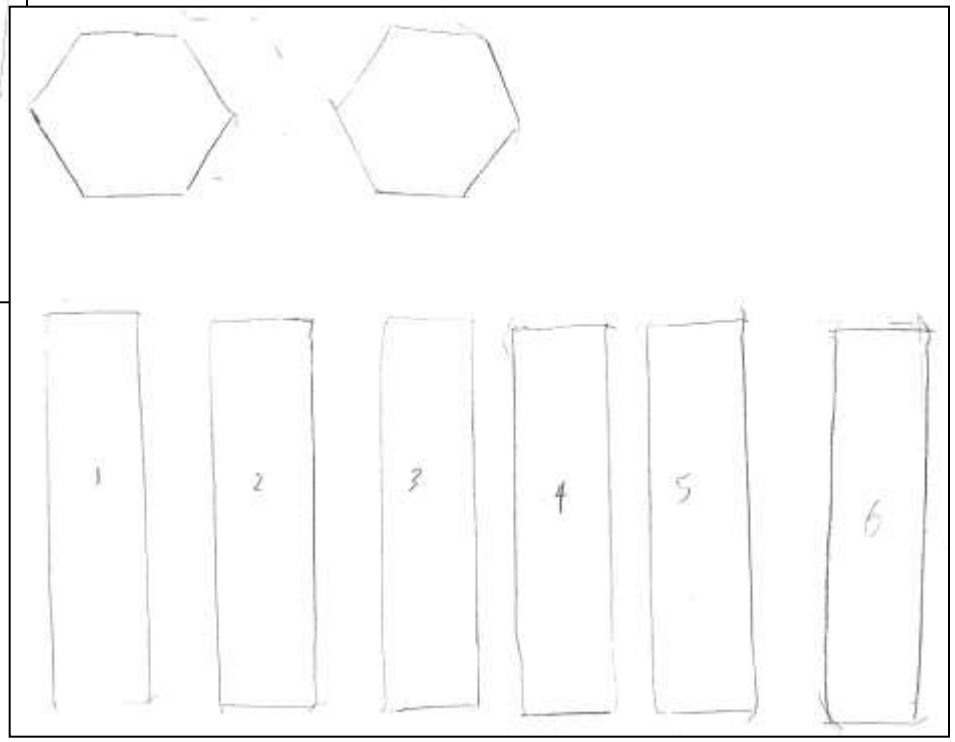
學生印出
四角柱體的面





學生印出
五角柱體的面

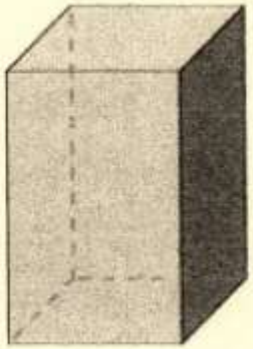
學生印出
六角柱體的面



三角柱體

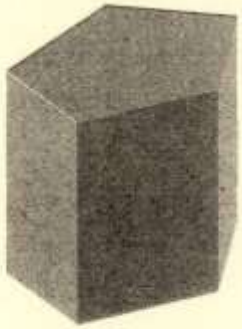
底是三角形。 數目有2個。	側面是長方形。 數目有3個。	共有面5個。

每組同學把結果記錄起來



四角柱體

底是四邊形。 數目有2個。	側面是長方形。 數目有4個。	共有面6個。



五角柱 體

底是五邊形。	側面是長方形。	
數目有 2 個。	數目有 5 個。	共有面 7 個。

每組同學把結果記錄起來

六角柱 體

底是六邊形。	側面是長方形。	
數目有 2 個。	數目有 6 個。	共有面 8 個。

綜合結果，讓學生歸納結論

A. 角柱體的特性

		底的形狀	底的數目	側面的形狀	側面的數目	面的數目
	三角柱體	三角形	2	長方形	3	5
	四角柱體	四邊形	2	長方形	4	6
	五角柱體	五邊形	2	長方形	5	7
	六角柱體	六邊形	2	長方形	6	8

B.我的發現：

1. 相同的地方：角柱有相同的底。
角柱的側面都是長方形。

2. 不相同的地方：不同的角柱都有不同的側面數目。
不同的角柱有不同底。

<u>與學生從討論中歸納出不同的角柱</u>

相同之處有：兩個形狀相同的底、側面的形狀都是長方形

不同之處有：底的形狀不相同、側面的數量不相同

學生表現

－所有組別均能完成操作活動，但有快慢之差異

－學生能依照老師的建議分工合作

－學生普遍能歸納出相同及不相同的特性，但運用語言描述有欠暢順

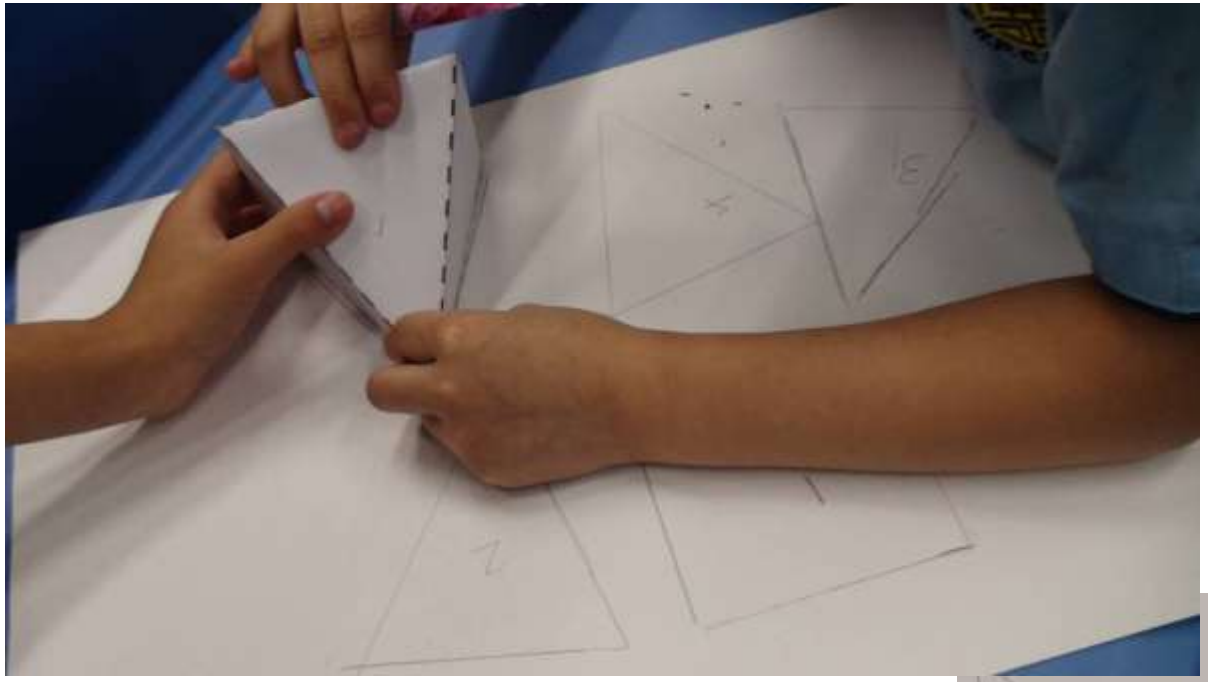
教學反思

—如何提升學生運用數學語言描述共同及相異特性之能力？

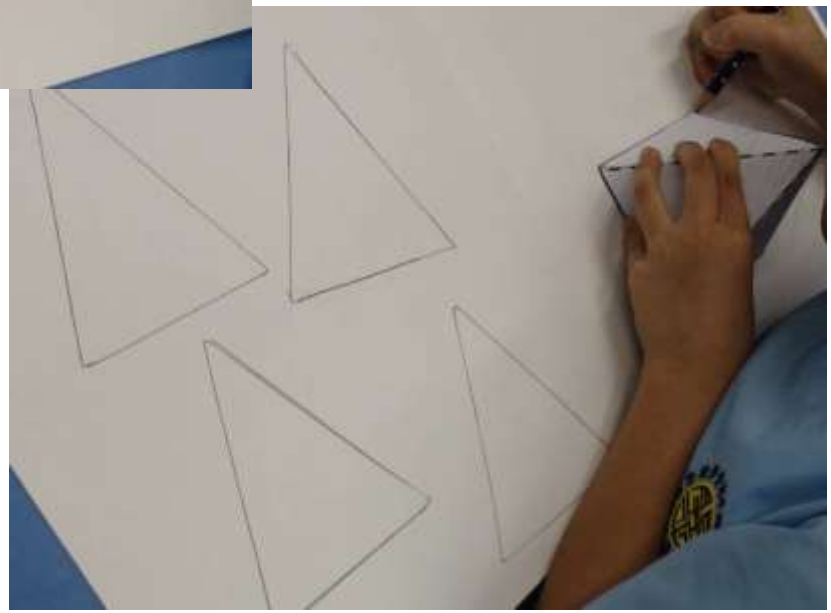
—學生在操作活動中的表現較想像中理想，可放較多教學時間讓學生描述特性

—可加強老師示範，並鼓勵學生完整地描述所有特性

活動二：
不同角錐的面有甚麼相同及不相同的特性呢？

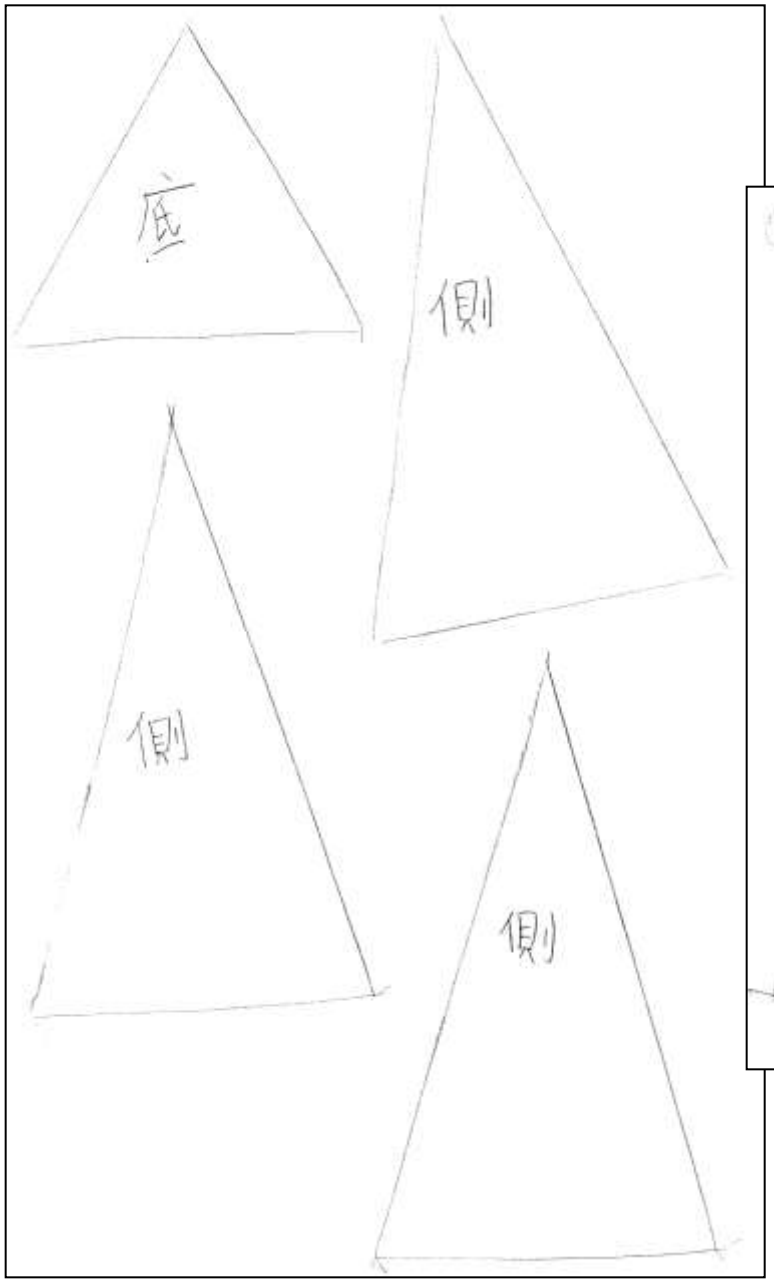


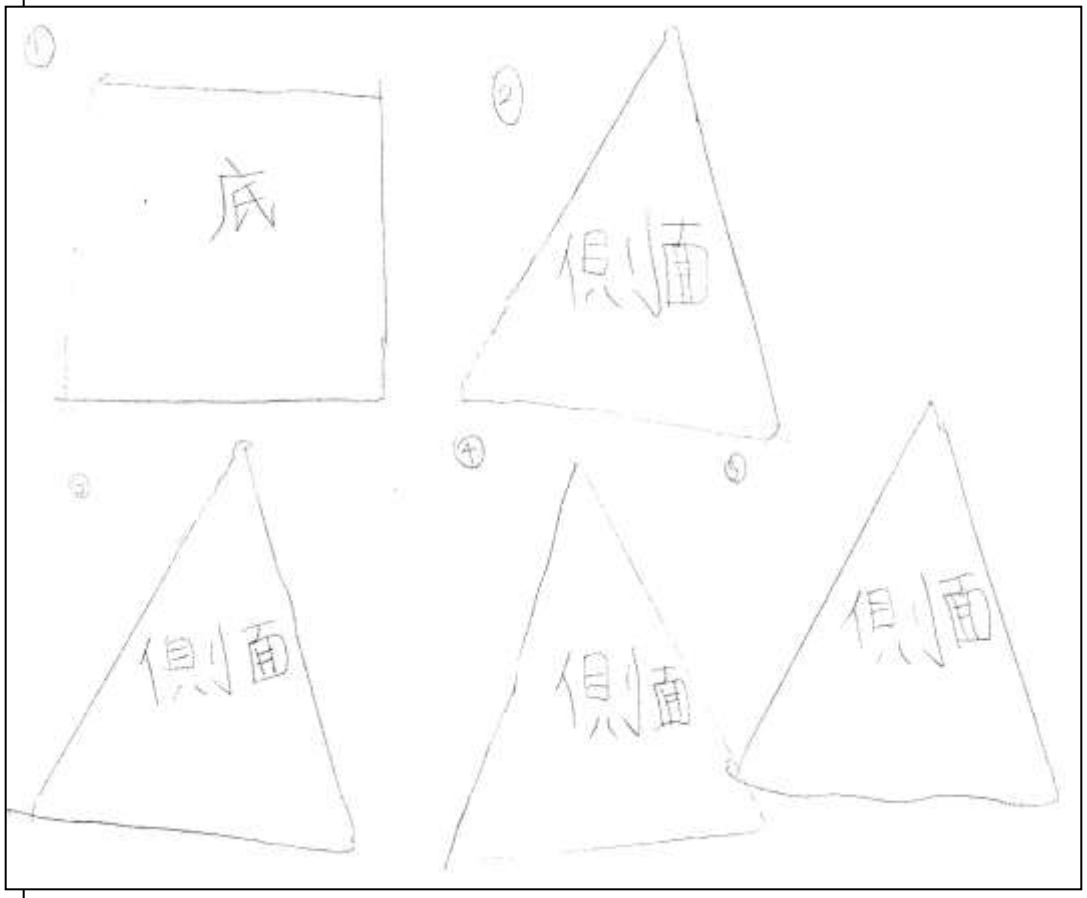
操作的效率
有所提升



學生在技巧、
合作性及信心
方面均有改進

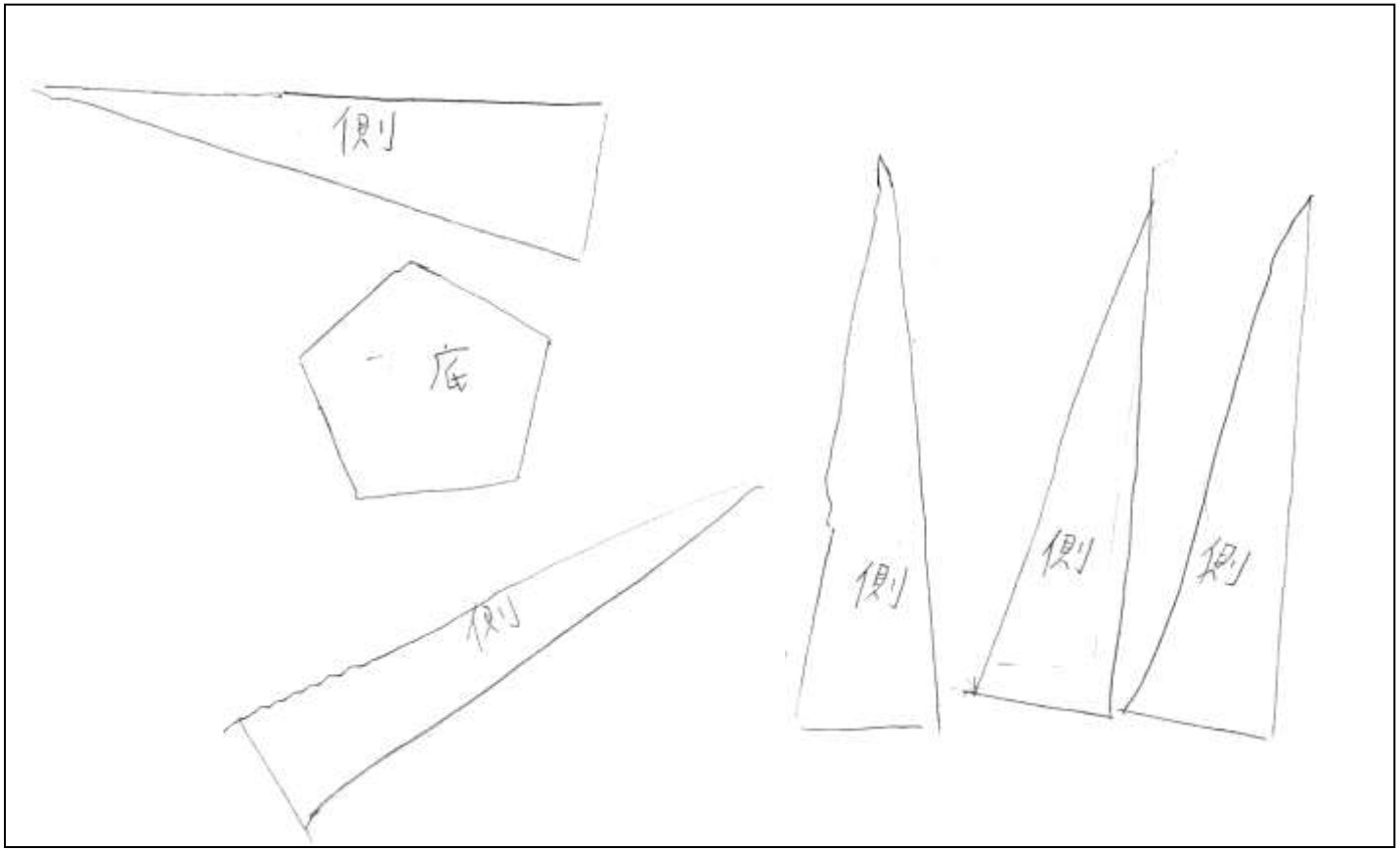
學生均能在印面上寫上底及側面等數學詞彙



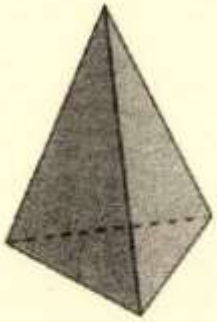


三及四角錐的印面

五角錐的印面



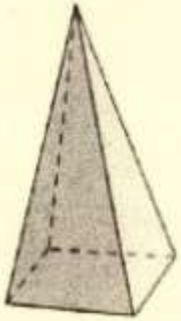
老師期望學生能從歸納三、四及五角錐的特性中，推理出六角錐的特性



三角錐體

底是三角形。 數目有1個。	側面是三角形。 數目有3個。	共有面4個。

每組同學把結果記錄起來



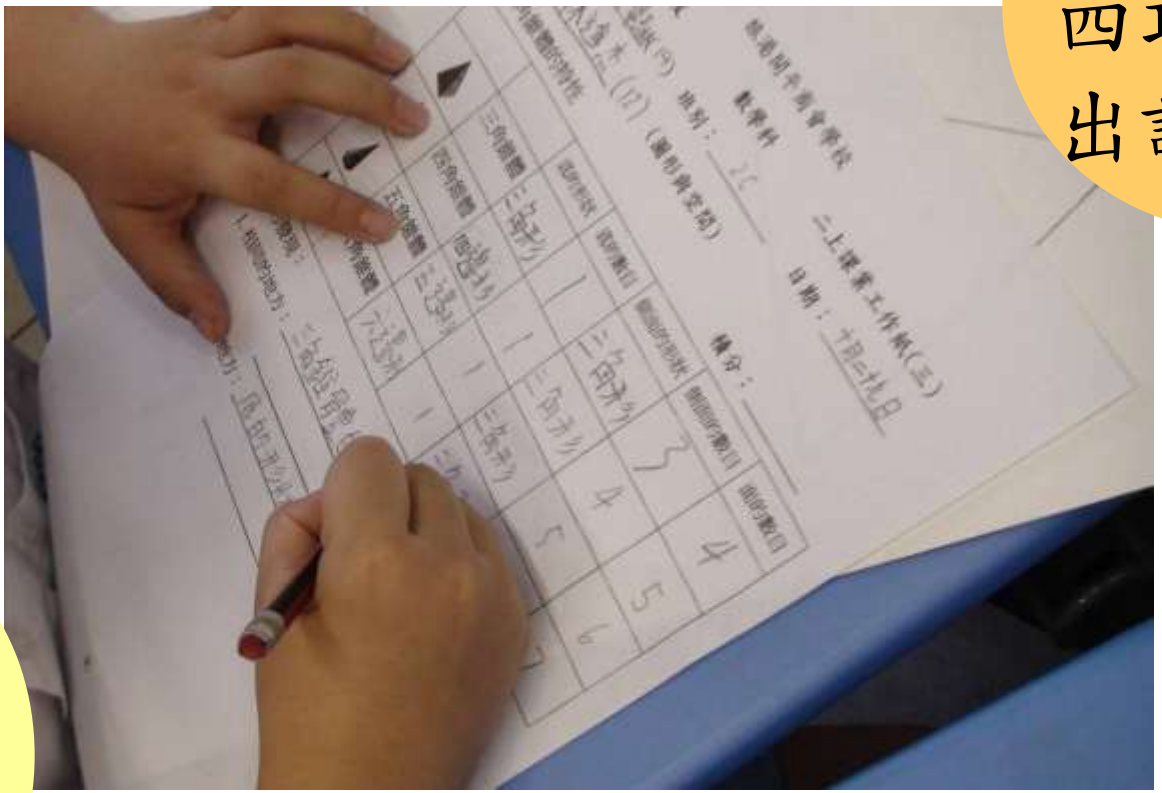
四角錐體

底是四邊形形。 數目有1個個。	側面是三角形。 數目有4個。	共有面5個。

五角錐體

底是五邊形。 數目有1個。	側面是三角形。 數目有5個。	共有面6個。

提醒學生就四項特性作出討論



學生的討論氣氛良好

較多組別能歸納出相同及相異的特性，並用心填寫

A. 角錐體的特性

		底的形狀	底的數目	側面的形狀	側面的數目	面的數目
	三角錐體	三角形	1	三角形	3	4
	四角錐體	四邊形	1	三角形	4	5
	五角錐體	五邊形	1	三角形	5	6
	六角錐體	六邊形	1	三角形	6	7

我的發現：

1. 相同的地方：底的數目都是1。
   側面的形狀都是三角形。
2. 不相同的地方：底的形狀不相同。
   側面的數目不相同。

A. 角錐體的特性

		底的形狀	底的數目	側面的形狀	側面的數目	面的數目
	三角錐體	三角形	1	三角形	3	4
	四角錐體	四邊形	1	三角形	4	5
	五角錐體	五邊形	1	三角形	5	6
	六角錐體	六邊形	1	三角形	6	7

我的發現：

1. 相同的地方：底的數目都是1。
   側面的形狀都是三角形。

2. 不相同的地方：底的形狀會不同。
   側面數目會和底的形狀有關。

部份組別指出角錐側面的數量和底的形狀有關

期望學生能完整地描述所有特性

－強調學生從四項特性中作出描述

－老師強調有清晰的示範

－增多全班一起朗讀的機會

學生表現

－學生進行操作活動的效率有所提升，他們投入活動，並表現有高的學習動機

－學生能從小組討論中歸納出角錐的特性相同及相異之處

－學生運用數學語言描述特性的能力有所改善，表達時較流暢及完整，並能運用準確的數學詞彙

教學反思

進行操作活動很費時嗎？

學生明白了就自然能講嗎？

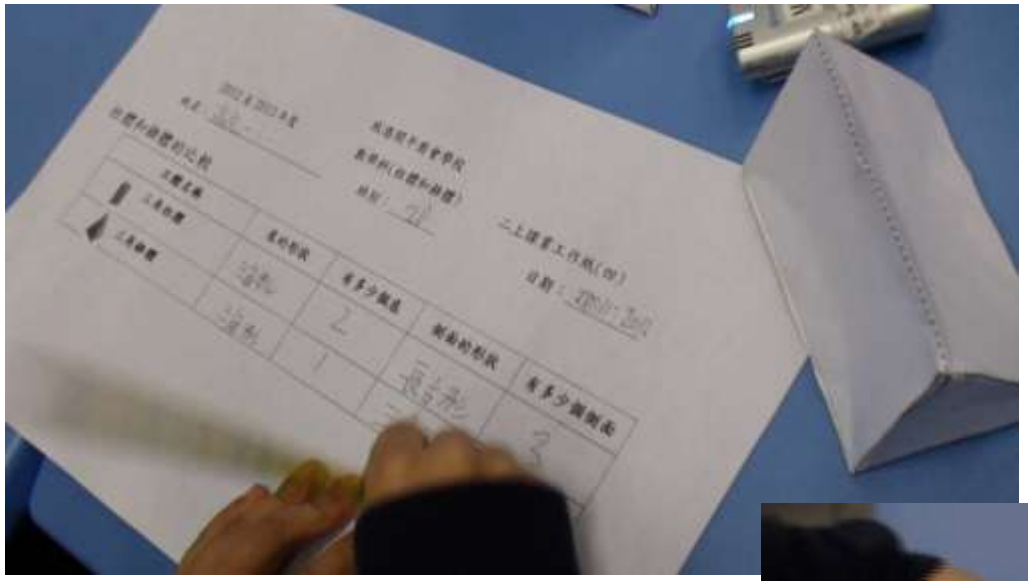
活動三：

角錐和角柱的面有甚麼相同及不相同的特性？

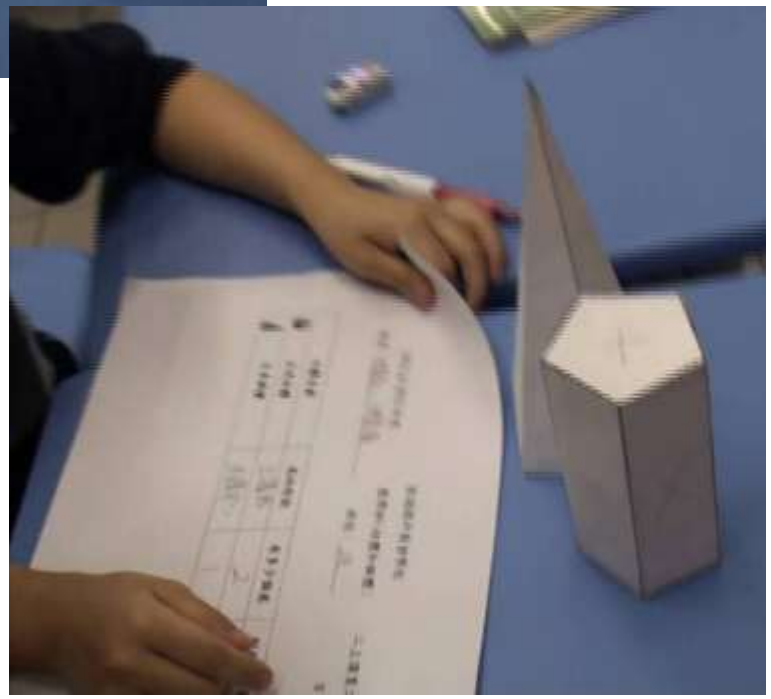
每組學生分發得相似的角柱和角錐各一（例如：三角柱和三角錐各一）

同學討論時從四項特性中比較兩個圖形的相同及相異之處

學生討論時就每項特性作出討論，而不是先列出每一圖形的所有特性，顯示有意識地作出比較



同學互相講解兩個圖形的相同及相異之處



同學能直接拿著實物
向全班講解三角柱和
三角錐、四角柱和四
角錐及五角柱和五角
錐的相同及相異之處

學生表現

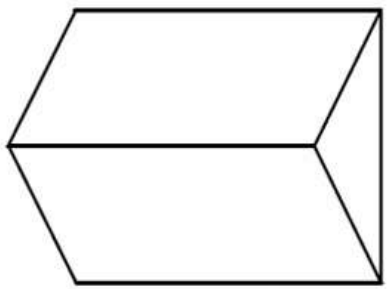
- 學生了解活動目標，有策略地進行討論
- 學生可直接拿著實物進行比較，顯示有較深化的學習
- 學生需較少的提示已能比較所有特性
- 由於學習重點和之前的活動不甚相同，所運用的表述方式也有不同，故同學表述沒有上一課的流暢

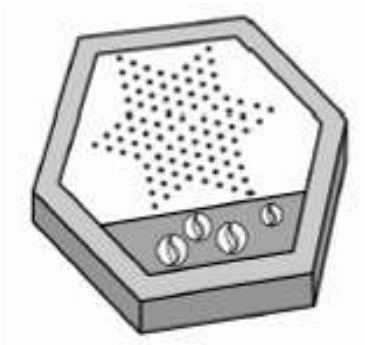
教學反思

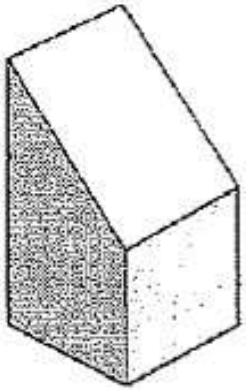
- 讓學生明白操作活動的目標，學生會思考策略進行解難
- 學生在不同的活動中需以不同的數學語言講述概念，每一概念也有其獨特之處，均需有充足練習機會

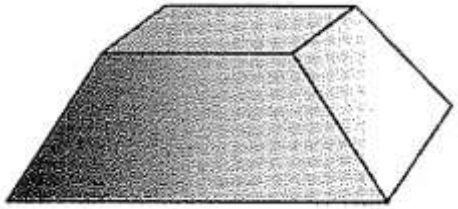
問題討論：

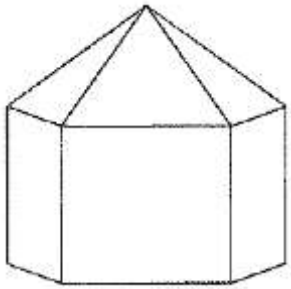
為甚麼小三學生判辨下列立體圖形感到困難呢？







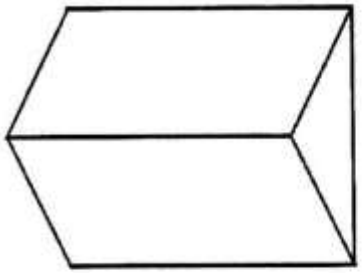




能否運用立體圖形的面協助學生判斷立體圖形的例子及非例子呢？

學生能分辨TSA中較難判斷的題目嗎？

學生以底和側面以及它們的數量作出解釋



這個立體圖形：

☑是柱體

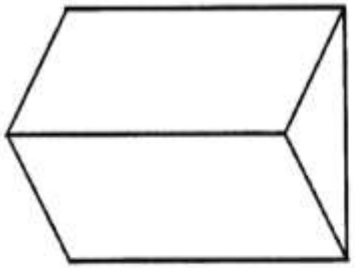
☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

它有三個長方形的側面和兩個相同三角形的底

學生以底及側面的形狀作出解釋



這個立體圖形：

☑是柱體

☐是錐體

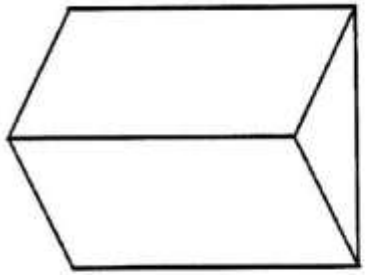
☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

因為底是三角形，側面是長方形。

大部份學生能正確地分辨

學生只以底的形狀作出解釋



這個立體圖形：

☑是柱體

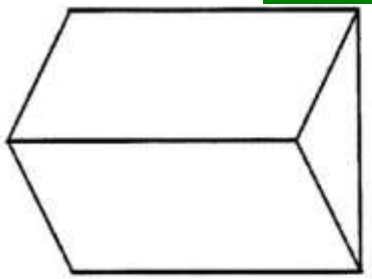
☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

有兩個 相同的底。

學生只以側面的形狀作出解釋



這個立體圖形：

☑是柱體

☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

側面是長方形。

學生的解釋有所差異

學生以底和側面以及它們的數量作出解釋

這個立體圖形：

☑是柱體

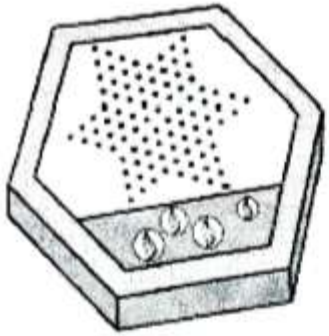
☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

它有六個長方形的側面
和兩個相同六邊形的底

學生以底及側面的形狀作出解釋



這個立體圖形：

☑是柱體

☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

因為底是六邊形，
側面是長方形。

大部份學生能正確地分辨

學生只以底的形狀作出解釋

這個立體圖形：

☑是柱體

☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

它的兩個底都一樣。

學生只以側面的形狀作出解釋

這個立體圖形：

☑是柱體

☐是錐體

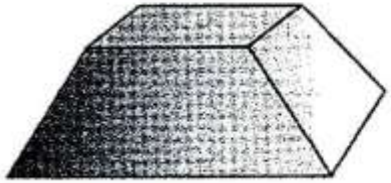
☐既不是柱體，又不是錐體

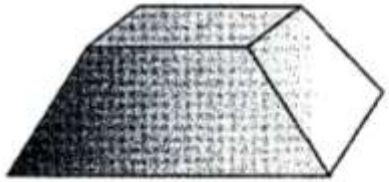
原因：

因為側面是長方形。

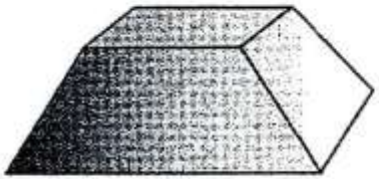
學生的解釋有所差異

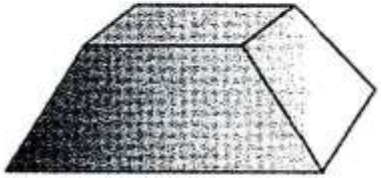
學生以底和側面作出解釋

	這個立體圖形： ☐是柱體 ☐是錐體 ☑既不是柱體，又不是錐體	原因：它不是柱骨豊，它沒有相同的底 它不是錐骨豊，它沒有三角形的側面

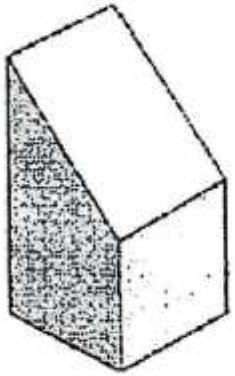
	這個立體圖形： ☐是柱體 ☐是錐體 ☑既不是柱體，又不是錐體	原因：因為底大小不同，而且側面是梯形，不是長方形和三角形

學生以底或側面作出解釋

	這個立體圖形： ☐是柱體 ☐是錐體 ☑既不是柱體，又不是錐體	原因： 不是柱體，因為沒有相同的底。 不是錐體，因為錐體只有一個底。

	這個立體圖形： ☐是柱體 ☐是錐體 ☑既不是柱體，又不是錐體	原因： 因為側面不是長方形和三角形所以不是柱體和錐體。

較少學生能作出正確判斷，解釋也有差異



這個立體圖形：

☑是柱體

☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：

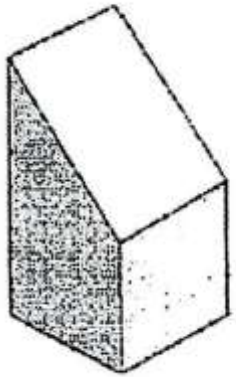
它有四個長方形的側面和兩個相同四邊形的底

這個立體圖形：

☑是柱體

原因：因為它底和面的圖形都是一樣。

（因為它底和面的圖形都是一樣）



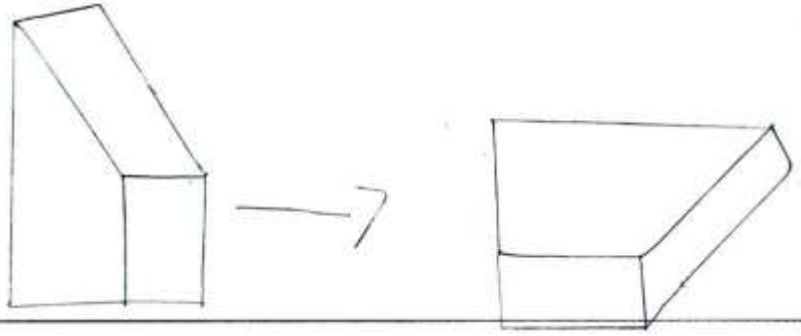
這個立體圖形：

☑是柱體

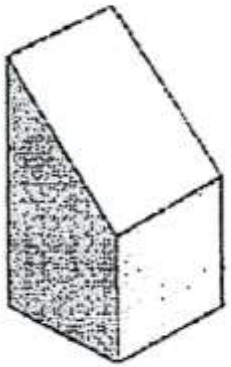
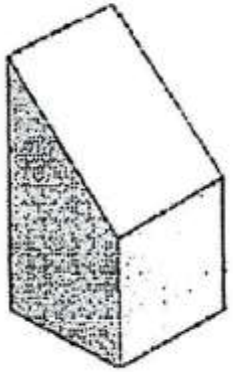
☐是錐體

☐既不是柱體，又不是錐體

原因：



錯誤的學生均分不清此圖形的底和側面

	這個立體圖形： ☐是柱體 ☐是錐體 ☑既不是柱體，又不是錐體	原因：因為底是長方形和正方形，而且側面不是長方形和三角形。
	這個立體圖形： ☐是柱體 ☐是錐體 ☑既不是柱體，又不是錐體	原因：它沒有長方形或三角形的側面。 （它沒有長方形或三角形的側面）

為甚麼學生從實物中能作出判辨，而在平面圖中卻未能做到呢？

我們的反思

- 學生在解釋正例子時所表達的理據有差異，在否定一例子時只需提出一項不附合的條件已足夠

- 學生判斷實物時較具體及容易，但判斷平面圖時則有困難，可能因為他們缺少從多角度觀察立體圖形的經驗，也沒有學習經驗從立體的平面圖中連繫到真實的立體圖形

學生是否知道圓錐和圓柱展開的曲面是怎樣的呢？

學生互相討論結果，並進行比較

我們的反思

- 學生在分辨圓柱及圓錐雖困難不大，但由於學生較難從直觀中認識它們展開的曲面，故需讓他們有實際操作經驗
- 學生可從操作活動進行探究，自行發現知識，以滿足其好奇心，提升他們的學習動機及興趣

小二的教學總結

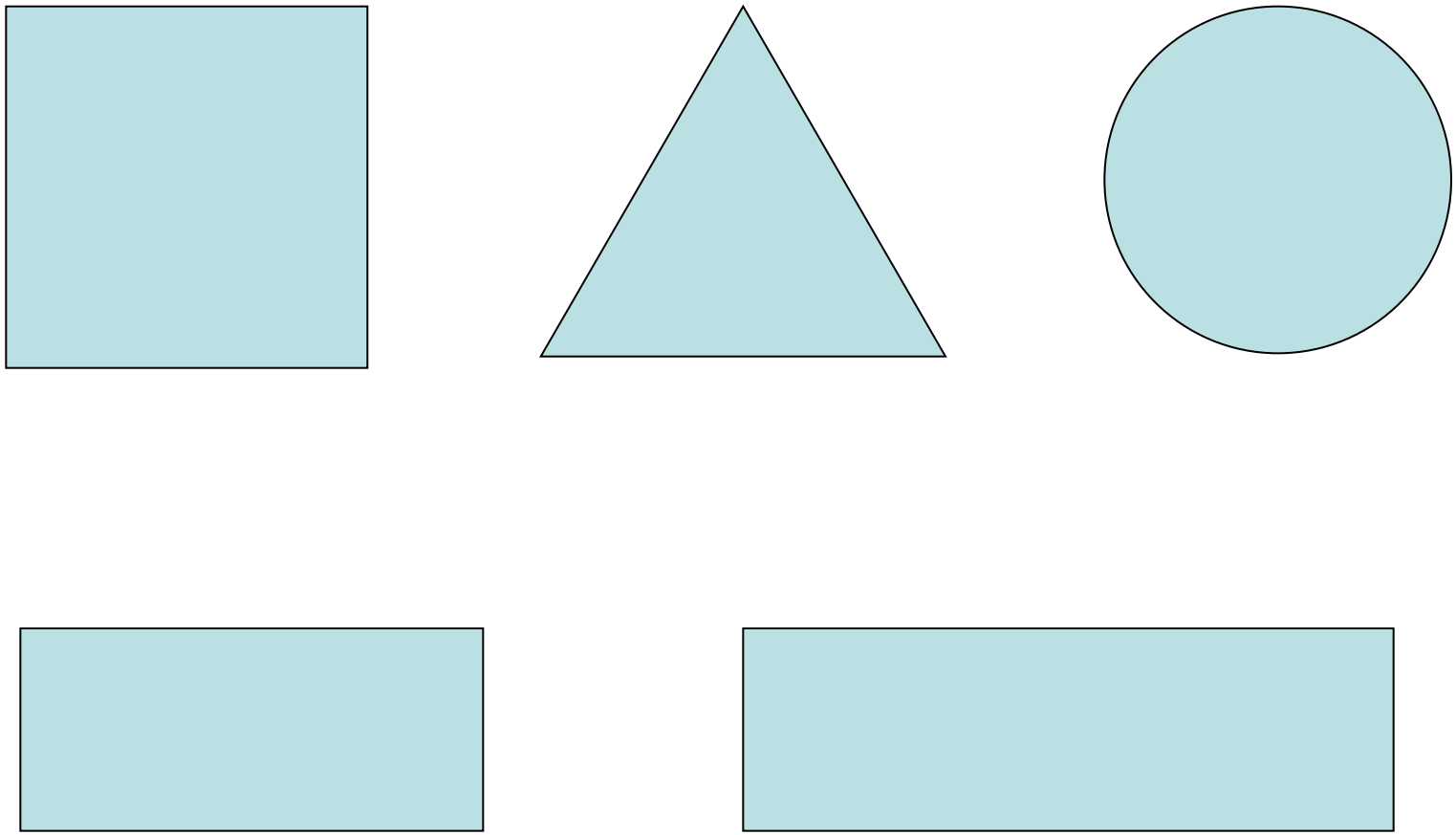
- 學生從操作活動中自行探究及建構概念，對學習有更深刻的掌握
- 學生運用數學語言作解釋能重新組織思考及釐清概念，鞏固學習

小一　從平面看立體

在小一時讓學生從多角度觀察立體，提升他們觀察立體平面圖的能力，讓他們能連繫平面圖及實物的立體圖形。

活動一：從平面圖形看立體

老師展示不同的平面圖形



老師以短片展示可從不同角度觀察同一立體

鼓勵學生拿起並轉動立體進行觀察

學生討論平面是屬於哪些立體圖形的

學生示範如何從不同的立體中看到相同的平面

學生拿起圖形以合適的角度進行觀察

學生從不同的立體圖形中也可觀察到相同的平面圖形，加深了對立體圖形的理解

學生表現

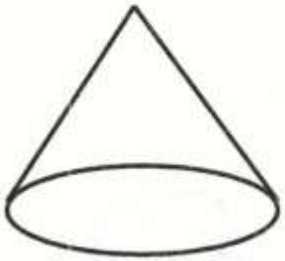
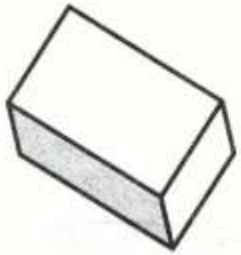
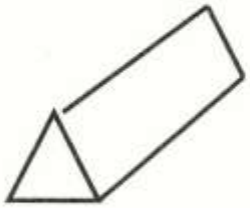
- 學生能以多角度觀察立體圖形
- 學生了解到從不同的立體圖形中也可觀察到相同的平面圖形，擴闊了思考空間

活動二：從立體圖形的平面圖看立體

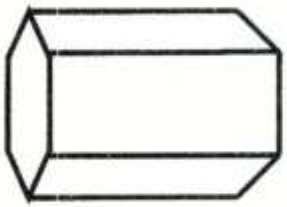
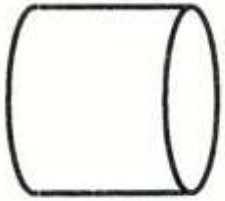
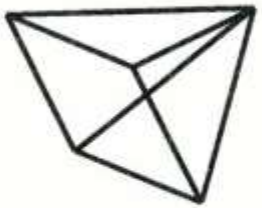
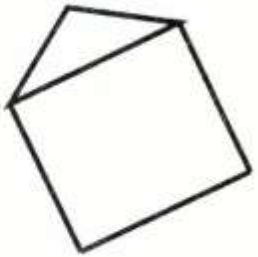
思考問題：學生能從立體圖形的平面圖中連繫到立體圖形的真實模型嗎？

學生需配對工作紙上的平面圖及枱面上的立體圖形模型

看看桌子上的實物像以下哪一個立體圖形，把實物上的英文字母寫在圖形下面的(　　)內。

1.	2.	3.
 (F)	 (B)	(J)
4.	**5.**	**6.**
(G)	 (L)	(A)

學生需配對工作紙上的平面圖及枱面上的立體圖形模型

7.	8.	9.
 (C)	(K)	(E)
10.	**11.**	**12.**
 (H)	 (D)	 (I)

老師利用實物投影器示範如何從觀察立體中判斷平面圖屬哪一立體圖形

判斷三步曲：對正望、轉動圖形、數面

老師和學生討論從不同角度觀察立體所觀察到的平面圖會有甚麼不同

學生進行活動的情況

學生不停作出選擇、反覆從不同角度觀察及互相討論

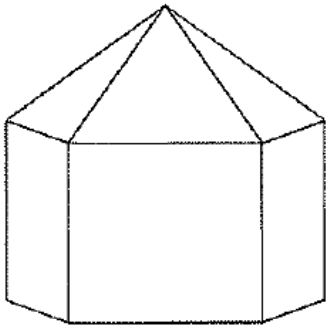
學生講解如何判斷哪個立體屬哪個平面圖

學生能運用三步曲進行觀察，並清楚解釋為何選擇這個立體圖形

我們的反思

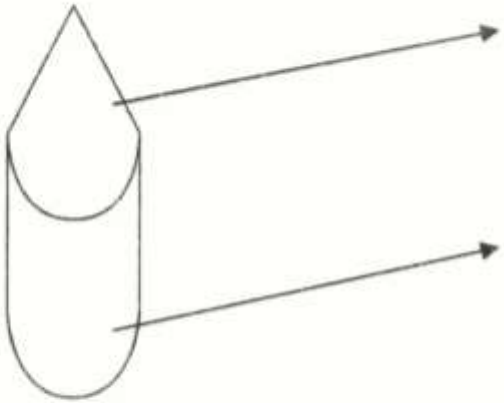
學生從多觀察立體圖形中就懂得分辨立體圖形的平面圖嗎？

活動三：從立體圖形的平面圖中組合兩至三個立體圖形



學生需觀察平面圖，並運用立體圖形模型作出拼砌

以下的建築物是由多個立體堆砌，把所用的立體名稱圈出來。

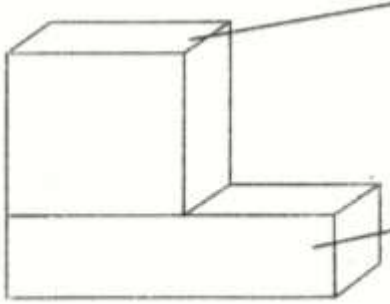


1.（ 柱體 / 錐體 / 球體 ）

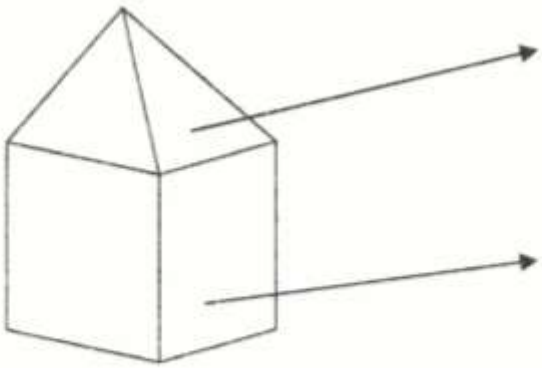
2.（ 柱體 / 錐體 / 球體 ）

3.（ 柱體 / 錐體 / 球體 ）

4.（ 柱體 / 錐體 / 球體 ）

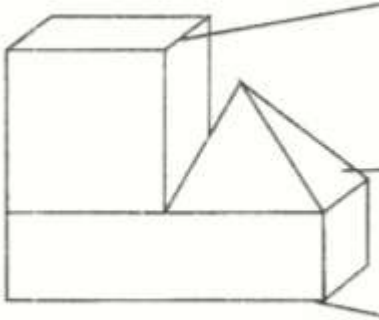


學生需觀察平面圖，並運用立體圖形模型作出拼砌



5. (柱體 / 錐體 / 球體)

6. (柱體 / 錐體 / 球體)



7. (柱體 / 錐體 / 球體)

8. (柱體 / 錐體 / 球體)

9. (柱體 / 錐體 / 球體)

同學也可運用三步曲進行觀察

老師向學生介紹貼面的概念

學生以小組方式進行拼砌，熱烈討論及投入活動

老師拍下學生的作品，作即時回饋

發揮創意的時候來了

學生講解他們為何選擇這兩個圖形作出拼砌

小一的教學總結

- 學生能從多角度觀察同一立體圖形
- 學從能作多角度了解同一立體圖形可觀察出相同的平面圖形
- 學生掌握到從立體圖形平面圖中連繫到立體圖形模型的一些技巧
- 學生能連繫現實中的立體圖形並作出創作

總結

教學中的由平面到立體

從依書直說

到

手到、眼到、口到及腦到

謝謝！