從立體看平面，從平面看立體

周偉志先生（高級學校發展主任）
陳泉勝老師、周錦鋒老師、張盛孝老師、黎璧茵老師
（旅港開平商會學校）

從課程指引看學習內容

在小二的「立體圖形」課題中，學生需直觀地認識「面」，並把各種立體圖形分類。其實在小一時，學生已從直觀中認識了平面及立體圖形的分類，為甚麼在小二時，又要再從直觀立體圖形中認識「面」呢？讓我在這裏作一點註解。

在數學課程指引（小一至小六）的安排中，小一時學生先從直觀中認識各種立體圖形，然後再從立體圖形中認識平面圖形，這和很多人認為學生先學平面後學立體的想法不同，這是由於孩童的生活環境是充滿著立體圖形的，例如雪糕筒是圓錐體，故此他們對立體圖形有較多具體經驗。另一方面，孩童是從觀察日常生活中立體圖形的面而認識平面圖形的，例如學生可透過觀察衣櫃（柱體）的側面認識長方形，故課程指引有此安排。那為甚麼在小二時，學生又要從立體圖形中直觀地認識「面」呢？這是由於學生可從一個立體圖形不同的面中加深對那個立體圖形的認識（例如一個三角柱體有兩個底，兩個底都是相同的三角形，它有三個側面，三個側面都是長方形）。因此小一和小二在處理立體圖形的關注點上甚為不同（香港課程發展議會，2000）。

從文獻看教學理念

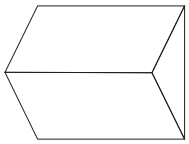
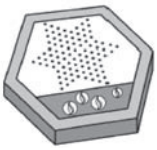
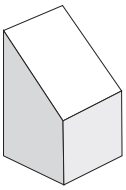
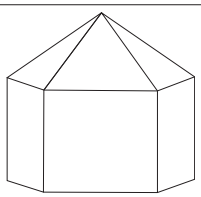
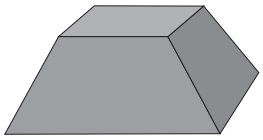
課程指引的安排乃乎合van Hiele的兒童幾何思維發展理論(Burger & Shaughnessy, 1996)。根據理論，兒童幾何思維發展分為五個階段，由零階段至第四階段分別為：認識（recognition）、分析（analysis）、關係（relationships）、演繹（deduction）及定理（axiomatics），而小學課程的要求約只到達第二階段，即「關係」階段。在零階段中，兒童會根據圖形的整體外觀認識圖形，而不考慮它的部分，例如在小一的立體圖形中，學生從直觀分類中認識圖形的名稱；在第一階段中，兒童能分析圖形的簡單特性，但不能看出圖形間的相互關係，例如小一學生需描述圖形的簡單特性（例如：有否尖頂？能否疊高或滾動？）；而在第二階段中，兒童能以圖形最少的特性加以定義及分類，例如在小二課程中學生以「面」這角度來了解及比較柱體及錐體的簡單特性。

Piaget 及 Inhelder (1967) 的理論讓我們了解兒童在「圖形與空間」範疇中如何發展概念，理論提及兒童從逐步組織具體活動經驗及內化行為中建構有關空間的概念，因此這些概念的發展並不是從閱讀而來的，而是從不斷累積及進深的操作經驗而來。這理論在其後很多研究中均得到支持及肯定，例如Clements及Battista (1992) 提到兒童在空間的認知能力方面會有不同程度的發揮，這些差異主要不是基於先天的能力，而是在於後天從環境中有否多作操作活動的經驗。因此，在小一及小二的立體圖形中，學生需從不同的操作活動中建構概念。

面對的教學困難

在支援學校的經驗中，不少學校在處理初小的「立體圖形」時，並不太重視設計活動讓學生從操作活動中建構概念，當中問題可能包括立體圖形模型的數量不足，又或是老師認為課時不足等；也有些情況是教學時老師只和學生討論及完成書本中的課業，再加上測考時一般只作紙筆評估，而評估題目也和平常的練習相似，故此學生的學習問題未能得以反映。

在全港性系統評估（TSA）報告中，每年均有提及學生在第一學習階段「圖形與空間」中一些學生表現較差的題目。以近幾年的題目為例，學生判別下列立體圖形時有所困難及混淆。

 TSA 2012 （圖一）	學生遇到立體圖形的面有三角形時，即使它是一個三角柱體，也會判辨它是錐體，因錐體的側面是三角形。
 TSA 2012 （圖二）	學生未能判辨較扁的或從某角度看起來較扁的柱體，因學生接觸的例子大多有一定高度，他們也不習慣從不同角度（例如較高角度）觀察立體圖形。
 TSA 2010 （圖三）	學生日常較多接觸常規的立體圖形，例如長方體，因此較難辨認不常見的立體圖形，例如底是梯形的四角柱體。學生觀察立體圖形時，習慣以底貼着枱面的擺放方式，而不習慣其他擺放方式，例如把側面平放枱面的方式。
 TSA 2010 （圖四）	學生較難判辨組合的立體圖形由哪些圖形組成，一方面學生缺乏觀察組合圖形的經驗，另一方面當兩個圖形的其中一面能完全貼合時，學生在平面圖中較難判斷那個面的形狀。
 TSA 2009 （圖五）	學生較少機會觀察一些柱體和錐體的非例子，尤其當遇到一些疑似柱體或錐體的非例子時，學生更容易判斷錯誤。

從實踐教學策略中回應問題

旅港開平商會學校在檢討此課題的教學時也發現有相似的問題，學生缺乏從操作活動中建構概念的經驗，學生在TSA中解答以上問題的表現也不如想像中理想，故嘗試改變教學策略，讓學生多從實物操作中建構立體圖形的概念，同時使他們能夠從立體圖形的實物及其平面圖中分辨不同的立體圖形。除了立體圖形的分類等在van Hiele的兒童幾何思維發展理論中「認識」階段的操作活動外，學校尤其關注兩類連繫立體和平面的操作活動，第一類活動是在小二進行，讓學生分析及比較不同立體圖形的面，加深了解不同立體圖形的特性，從而加強他們分辨不同立體圖形的能力，協助他們從「認識」過渡至「分析」及「關係」階段；第二類活動是在小一進行，鼓勵學生從不同角度較全面地觀察立體圖形，強化他們在「認識」階段對立體圖形的認識，為提升他們的幾何思維發展建立基礎。此外，活動設計強調連繫立體圖形的模型及其平面圖，期望加強學生從立體圖形的平面圖中判斷不同立體圖形的能力。

在第一類活動中，學習策略強調由具體至抽象，讓學生由實物過渡至圖像，從觀察規律中發現柱體及錐體的特性，並從比較特性中強化認識柱體和錐體的異同，從而作出判別。在探究柱體的特性中，學生需印出實物模型的所有面，並記錄出底的形狀、底的數量、側面的形狀、側面的數量及面的總數量，學生再從觀察三角柱體、四角柱體、五角柱體及六角柱體中發現規律，了解柱體的面與柱體的關係，並推論不同柱體的底及側面的變化，之後以類似的策略探究錐體的特性。當學生分別歸納到柱體及錐體與其面的關係後，老師再讓學生對比近似的柱體及錐體，即三角柱及錐體、四角柱及錐體、五角柱及錐體和六角柱及錐體，學生從比較它們的底及側面的形狀和數量之異同中，深化分辨柱體和錐體的能力。至於圓柱體及圓錐體，學生也需比較它們的底及側面，但由於它們的側面是曲面，故學生可剪開其曲面，並比較其展開圖。

這類活動提供一分析方法，讓學生判別立體圖形是柱體或是錐體，同時提供一共通語言，讓學生描述立體圖形所屬類別的原因。例如在圖一中，雖然立體圖形的面有三角形，但是它的側面是長方形，故此那是柱體而不是錐體。又例如當學生遇到一些以不慣常角度繪畫的立體圖形時，就如圖三一類，他們也能作出判別，在配合實物解釋下，學生明白到那是一個柱體，原因是它有兩個底，兩個底都是相同的四邊形，它有四個側面，四個側面都是長方形。此外，學生也能以此分析方法判斷非例子，就如圖五中，學生明白到那個不是錐體，因為錐體只得一個底，而那例子有兩個，錐體的側面是三角形，而那例子的側面是四邊形，學生同時明白那個亦不是柱體，因為柱體的兩個底是相同的，而那個例子不是，柱體的側面是長方形，而那個例子也不是，和學生討論時，老師配合實物模型作出解釋，並把其面印出，與學生共同分析。

學生在解答紙筆評估時，面對的另一困難是未能從立體圖形的平面圖中聯繫到其實物模型，故建議學生在小一時多作這些活動。在第二類活動中，學生需從立體圖形的平面圖中找出所屬的立體圖形，當中老師嘗試了兩個活動。第一，老師會展示一些平面圖形，例如三角形，學生需從幾個立體圖形中找出一個，並選擇一角度觀察，使之能觀察到那平面圖形。第二，老師會展示一些立體圖形的平面圖，那些平面圖會以不同角度繪畫，就如圖一及圖二一類，學生需從眾多立體圖形中選出一個，並以不同角度觀察，使之能配合到那平面圖的繪畫角度。這兩個活動均鼓勵學生從不同角度觀察立體圖形，從而提升空間感，並能從立體圖形的平面圖中聯

繫到其實物模型。為進一步提升學生在這方面的能力，老師與學生進行了第三個活動，老師向學生展示一些立體圖形組合的平面圖，就如圖四一類，學生需從眾多立體圖形模型中選出二至三個，並把它們組合成平面圖的模樣。

老師總結此課題的教學成效，對比以往的學生，學生更投入課堂活動，並表現得對這課題甚有興趣，他們解答有關立體圖形題目的能力有所提升，能以多角度觀察立體圖形，並能清晰地分辨柱體和錐體，也能以數學語言描述兩者之間的分別及關係。老師也體會到實物操作的重要性，雖然需要的教學時間較多，但這帶來深入的學習，也讓學生有機會從探究中建構概念，提升了學習能力。此外，課題需讓學生多以數學語言描述立體圖形，從學生對話中老師能了解學生掌握概念的程度，學生運用語言描述的能力也逐漸提升。老師期望透過這次分享會和大家分享他們探討這課題時的經歷及所思所想，包括他們如何從分析學生難點到設計教學的經歷，老師會以課堂片段及學生習作闡釋學生在學習過程中的表現及轉變，從而回應對此主題的看法，並希望與參與分享會的老師有所交流。

參考資料

1. Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1996). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1), 31-48.
2. Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.
3. Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: W. W. Norton.
4. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。
5. 香港考試及評核局(2009)。《2009年全港性系統評估學生基本能力報告》。香港：香港考試及評核局。
6. 香港考試及評核局(2010)。《2010年全港性系統評估學生基本能力報告》。香港：香港考試及評核局。
7. 香港考試及評核局(2012)。《2012年全港性系統評估學生基本能力報告》。香港：香港考試及評核局。