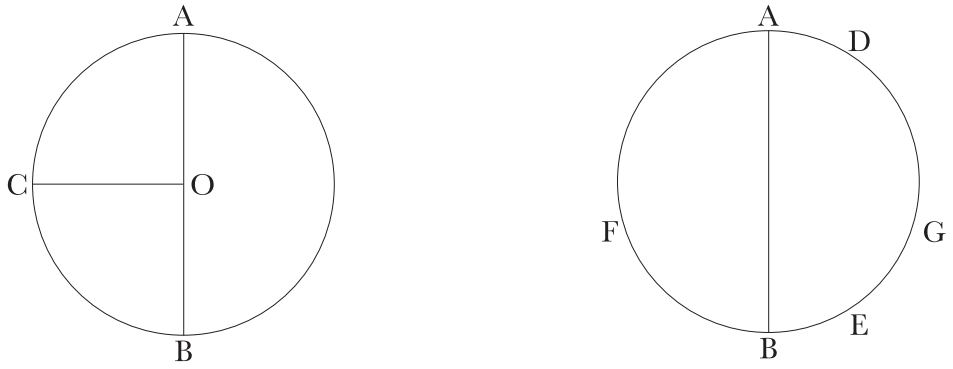
探究圓周率和圓弧圖形的周界

蕭霞萍女士(高級學校發展主任)
羅惠儀老師、關家暉老師、陳錦權老師
(仁德天主教小學)

本環節所分享的題材屬於「度量」範疇中「圓周」單元的內容，然而學生要掌握這一單元的概念，就必須先掌握「圓」的概念。

圓

在平面上選定一定點O，在平面與定點O的距離是r (r > 0) 的所有點結成的集合稱為圓，該定點O稱為圓心，r稱為半徑。參考(圖一)，圓上任意一點與圓心所連成的線段就是半徑，兩條半徑若能連成一直線段，該直線段便是圓的直徑。圓把平面區分為三個部分：圓的內部、圓(圓周)和圓的外部，圓和圓的內部合起來稱為圓區域。圓上任意兩點可以將圓分割成兩部分，都稱為弧，如果兩部分一樣長，則稱為半圓。



AB是直徑、CO是半徑　　DGE是弧、AFB是半圓

(圖一)

圓周率

所有的圓都相似(similar)，因此所有圓的直徑和半徑的比都相等，其比值剛好是2，而古代數學家透過圓內接正多邊形求圓面積(簡稱「割圓術」)時，發現所有圓的圓周和直徑的比也會相等，數學上稱圓周與直徑的比值為圓周率，並將圓周率簡記成 π (洪萬生，1979)。

提供不同大小的圓，然後使用尺和其他工具幫忙，量出圓周和直徑的長度，再算出兩者的比值的方式求圓周率，是香港小學階段最常見引入圓周率的教學方式。值得注意的是，圓周率是一個無理數，使用上述方式算出的圓周率是一個有理數，也只是一個近似值，因為畫圓和量度都存在不可避免的誤差(謝堅、朱建正、魯炳寰、廖淑麗，2006)。

「圓周」的學習重點及教學難點

根據《數學課程指引》(香港課程發展議會，2000)，圓周單元包括下列學習重點：

1. 認識圓周；
2. 探究圓周與直徑和半徑的關係；
3. 認識圓周率；
4. 認識古代中國數學家找出圓周率的故事；
5. 應用圓周的公式。

備課會時教師告訴我們，當教授這一課題時，他們通常會遇到以下疑難：

1. 圓周率的推算，背後牽涉複雜的數學概念和方法，如何將它們串連起來，令學生融會貫通，以及引起他們主動探求的意欲？
2. 如何幫助學生理解圓周率的意義，以及明白3.14和$\frac{22}{7}$只是近似值？
3. 求與圓有關的複雜圖形的周界時，如何幫助學生掌握把圖形的周界分割及重組的基本概念？

探究圓周率

其實圓周是一個傳統的教學課題，多年來，教師就這個課題累積了不少資源，其中不乏形式新穎的設計，讓人留下深刻印象。

然而在實際教學中，教師經常要面對的現實是：不少學生已經知道圓周率表示圓周和直徑之間的倍數，還能將圓周率背誦到小數點後面多位，也初步知道如何運用圓周率計算圓周。若教師要求學生進行有關探究活動，並從中歸納出圓周和直徑的比值(圓周率)，不少學生只會敷衍了事，隨意提出3.14作為答案，未能真正體驗圓周率的意義。在這樣的情況下，如何引起學生的學習動機是教授這個課題其中一個難點。

於是，仁德天主教小學的教師將策略調整。首先讓學生思考下列問題：

1. 你怎樣證明圓周和直徑的比值是3.14 ？
2. 圓周和直徑的比值是否恰好是3.14 ？

透過這兩道問題，教師成功將學生的「已知」變為「未知」，令學生產生「認知衝突」(Festinger, 1957)，引發他們主動地探索「未知」，從而認真地量度圓周和直徑，以求算出精確的比值。

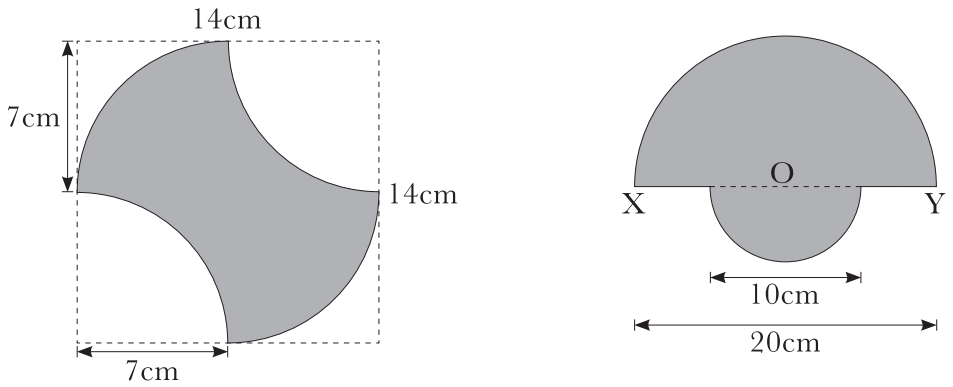
由於學校按學生能力分班，設計這個探究活動時，教師亦考慮到照顧學習差異的策略。對於能力較佳的學生，我們著重培養學生的高層次思維能力。教師首先提供不同的物件：厠紙筒、汽水罐和隔熱墊，讓學生商討怎樣量度這些物件上圓的周長及其直徑，並讓他們選擇所需的量度工具，然後讓學生進行合作探究，找出圓周和直徑的比值，並向全班同學演示自己的量度方法、所得結果及解釋造成誤差的原因。對於能力稍遜的學生，教師讓學生進行相同的探究活動，但會事先教授合適的量度方法，例如使用繩和直尺量度隔熱墊的圓周，以及印出隔熱墊的圓周，接著以對摺的方法找出它的直徑等，再指導學生合作完成探究活動、演示結果及歸納結論。

引出3.14和$\frac{22}{7}$只是近似值

學生透過計算機得出了3.16、3.1514、3.142567等答案，教師並不就此順勢得出圓周是直徑的3倍多些，一般取3.14。相反，教師會讓學生就答案顯示的誤差進行討論及匯報。經過一番探索後，學生一般能指出他們的量度技巧欠精確，此時教師再讓學生討論如何提升答案的準確度，學生有的會提議改善量度工具或量度技巧，如採用沒有彈力的繩，或使用直尺量度繩長時要從刻度「0」開始等等，而當教師一再強調需要提升量度的準確度時，總有少部分學生會聯想到使用電腦軟件輔助。於是教師便覷準機會，分別示範透過兩個電腦軟件找出較為準確的圓周率，引出3.14和$\frac{22}{7}$只是近似值的概念。接著再呈現數學家劉徽及祖沖之的測量計算結果，以及介紹古今中外對圓周率的探究歷程，尤其是奇妙的「割圓術」。讓學生理解圓周率的意義之餘，也讓學生體會到求真求準的學習態度。

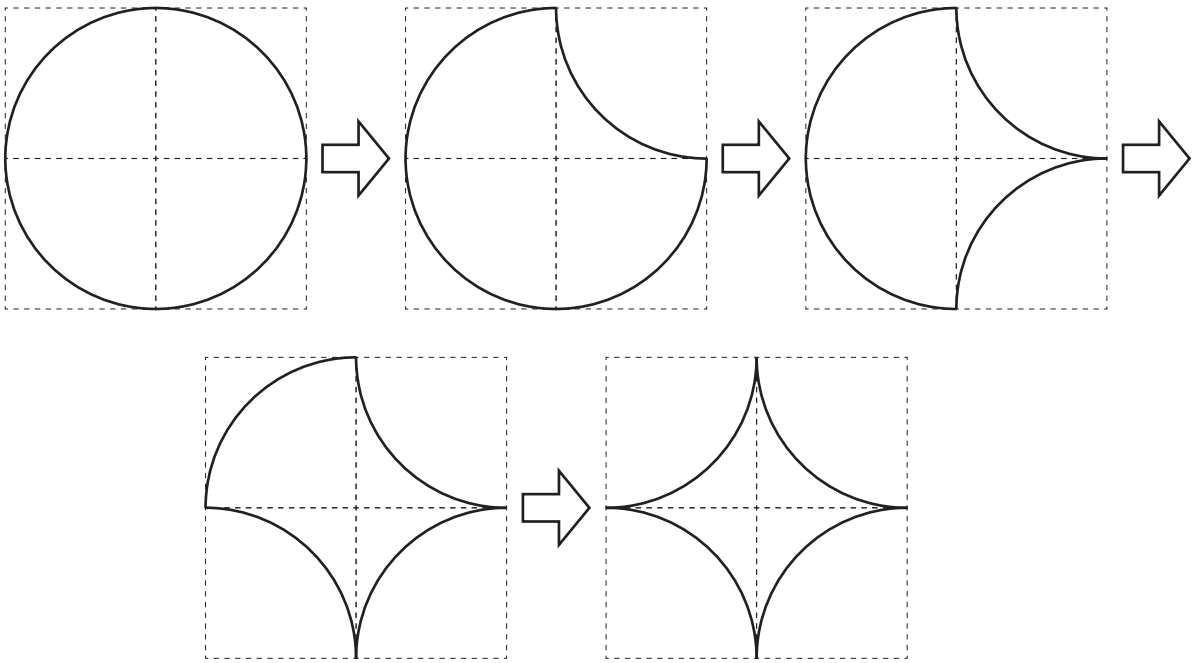
解構弧的長度與圓周的關係

課題的另一個學習重點是應用圓周的公式，學生一般需要解構一些與圓形有關的複雜圖形，如圖二：



（圖二）

然而學生往往需要教師的引導才能成功解題，究其原因，是學生未能掌握牽涉其中的基本概念。於是教師設計了一個簡單的活動(見圖(三))，先讓學生明白組成這些圖形的弧，主要是由$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{4}$個圓及直線所組成，然後再透過分組探究活動，讓學生分析及解構不同圖形的組成部分，並列出正確的算式。據教師反映，當學生掌握基本概念後，便能舉一反三，再複雜的相關圖形也可自行解答。



(圖三)

最後，教師會分析學生在圓周這個課題的整體表現，也會分享他們如何裝備學生解答TSA及Pre-S1的相關試題。

參考資料

1. Festinger, L. (1957). *A theory of cognitive dissonance. Stanford*, CA: Stanford University Press.
2. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。
3. 謝堅、朱建正、魯炳寰、廖淑麗(2006)。《國小數學教材分析》網址http://203.71.239.23/naerResource/study/216/book13/index.htm
4. 洪萬生(1979)。〈割圓術始末〉。《數學傳播》，第三卷第二期，頁1-8。