

## 探出分數真概念（小四）

李潤強先生（高級學校發展主任）  
雷志榮老師、董慧雅老師（聖安多尼學校）

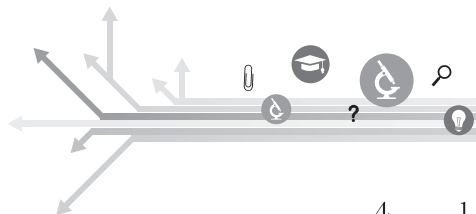
在過往與學校發展數學科校本課程的經歷中，聽到老師表示有些課題難以處理，而學生在學習方面也出現類同的困難。分數是其中一個使老師感到困惑的課題，原因是該課題牽涉廣泛的數學概念、運算技巧、以及應用於不同範疇的內容；而且分數的概念較為抽象及繁複，致使小學生感到困難。

分數是小學數學課程中的重要課題，當中的學習重點主要包括分數的概念、分數的四則運算與應用，分布於三至五年級數範疇的學習內容。另一方面，分數和許多課題有著密切的關聯性，例如分數可應用於百分數、代數、統計圖、長度、容量、重量、時間等課題，可見分數的應用涉及數、代數、數據處理及度量等範疇，而分數的應用於中學課程更為廣泛。因此，學生需具備基礎分數的概念及運算後，才能進一步應用於相關的課題。

在三年級引入分數課題時，首要目的是讓學生建構分數的基礎概念，學習重點主要包括「認識分數作為整體的部分及一組的部分」、「認識分數與1的關係」、以及「比較同分母或同分子分數的大小」，內容相對高年級分數的內容較少及淺易，學生遇見的困難亦相對較容易處理。然而當學生升讀四年級後，他們除需要掌握分數的基礎概念外，還需要更深入認識分數相關的概念、運算技巧及應用於日常生活中的難題。四年級分數的學習重點包括（香港課程發展議會，2000）：

1. 認識真分數、假分數和帶分數的意義；
2. 認識擴分及約分的概念；
3. 探究擴分及約分的計算方法；
4. 進行同分母分數加減法計算，答案宜約至最簡。

四年級分數的學習內容較廣闊及艱深，學生遇見的困難相對較為繁複，老師亦不容易解決。從過往與多所學校發展校本課程的經驗中，學生在各重點中常遇見一些共通的學習困難，例如學生在認識假分數與帶分數的互化時，利用乘加把帶分數化成假分數，然後利用除法把假分數化成帶分數。部分學生在學習往後的課題時，容易混淆或忘記兩種的計算方法。另外，在進行同分母分數加減法計算時，學生進行三個分數減法中，難以處理加減符號的運用。



例如：計算  $6\frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} - 2\frac{2}{5}$  時，教科書常建議的處理方法是把整數與分數的部分分別計算，然後才找出兩者的和，即是：

$$\begin{aligned} & 6\frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} - 2\frac{2}{5} \\ &= (6 - 1 - 2) + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) \\ &= 3 + \frac{1}{5} \\ &= 3\frac{1}{5} \end{aligned}$$

以上的運算方法在概念方面完全正確，然而學生在處理當中的加減符號時會感到困難。相信曾經教授此課題的老師也常遇見學生在計算類似以上的分數連減算式時，他們難以理解在減數中又需要運用加法。部分學生即使在課堂上能處理，但當回家後的家課表現常欠理想，往後的表現更是非常參差。若老師添加一些分數的加減混合算式題，加減符號的處理就更加複雜，例如：

$$\begin{aligned} & 6\frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} \\ &= (6 - 1 + 2) + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) \\ &= 7 + \frac{5}{5} \\ &= 7\frac{5}{5} \\ &= 8 \end{aligned}$$

以上第二步運算的加減法運用更為複雜，普遍學生也難以處理該類的算式題。另一方面，學生在處理把答案約至最簡時也出現困難，忘記約簡或約簡錯誤也是常出現的問題。

在解答應用題方面，很多老師都察覺學生在處理分數加減應用題時常感到以下的困難，例如：

「弟弟今天用了  $9\frac{1}{10}$  元，媽媽又給他  $35\frac{3}{10}$  元，他還有  $53\frac{9}{10}$  元，問他原有多少元？」





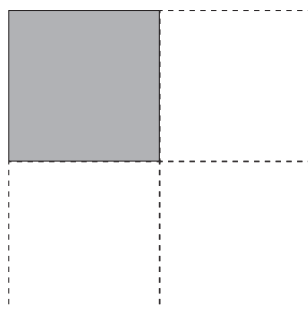
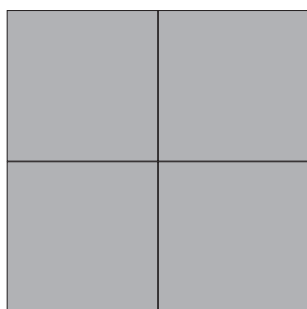
這是一道分數應用於日常生活中，有關錢幣的問題。老師表示即使能力中等的學生，在列式方面也感到困難，然而若把題目中的分數改寫成整數，例如：「弟弟今天用了9元，媽媽又給他35元，他還有53元，問他原有多少元？」，學生就較容易思考計算的方法。類似以上的情況經常發生在分數應用題中，然而該類的問題在過往學習整數的四則應用題也是常見，即是題目類型不是新的題型，只是當中的數字變成分數，學生的表現就明顯較弱，為甚麼學生在處理分數的應用題感到較為困難？他們是否害怕了分數呢？

聖安多尼學校的老師與本組協作籌劃相關的課程時，表示過往學生也常遇見類似的困難，多年來亦難以改善學生的學習，經過我們共同協作發展校本課程後，學生的表現明顯改善。是次分享會旨在分享我們的發展經驗與學生的學習過程，我們從探討如何重溫分數的基礎知識，然後認識分數的種類，深入分析每課業的學習重點，每個概念的關聯，以及學生的學習困難，讓學生逐步建構清晰的概念，再加以改善過往的運算技巧，促使他們能循序漸進地掌握各課題的重點。

在「分數的種類」課題中，學生需要認識真分數、假分數與帶分數的意義，當中包括假分數與帶分數互化的計算方法。參閱教科書的例子後，書本上先利用圖解分別認識真分數、假分數與帶分數，然後教授假分數與帶分數互化的計算方法。在練習及評估方面，一般的題型都是給與學生一組分數，然後把它們分類，即是分子比分母小，這就是真分數，分子等於或大於分母，這就是假分數，由整數及真分數組成的數，就稱為帶分數。另一些是「互化」的題目。

我們在深入討論該課題的數學概念時，思考到學生怎樣才算是認識真分數、假分數與帶分數的意義？學生是否懂得把分數分成三類及互化，就表示他們有充足的理解？還是學生能運用這些分數表示不同物件的數量？甚至學生能靈活地掌握在任何數量上使用合適的分數表示？意思是當某些物件的數量少於1，我們只可使用真分數表示；當物件的數量是整數時，我們可使用假分數及整數表示；當物件的數量是非整數而又大於1時，我們可使用假分數及帶分數表示。例如：

請用分數表示以下蛋糕有多少個？





部分教科書也包含類似的題目，然而書內的題目會指定學生使用假分數或帶分數其中一種回答，學生無需思考用哪種分數表示。若我們沒有指定用哪種分數，可以表示圖中的數量即必須回答，答案就會有兩個（帶分數  $1\frac{1}{4}$  及假分數  $\frac{5}{4}$  均可）。這樣的問題更為開放，學生需要分析哪種分數適合表示圖中的數量。當題目中的物件數量少於1，正確的答案就只有一個（真分數）。若學生能在不同的情況下，使用所有合適種類的分數表示物件的數量，是否代表他們較全面理解及應用三種類的分數？這類開放式的問題是否較封閉式問題（指定使用分數種類表示）更能彰顯學生理解及應用三種分數的能力？

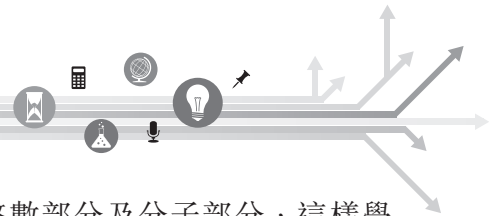
另一方面，以上開放式的問題亦有助學生認識假分數與帶分數互化的關係。學生若能處理這些問題，代表他們能以兩個分數（假分數與帶分數）表示同一的數量，即是兩個分數的數值相等。學生在已有這樣的兩個不同分數的數值相等概念後，然後才認識互化的方法，有助他們理解學習的需要，以及理解互化的計算方法。相反，假若學生仍未了解假分數與帶分數的關係，然後隨即學習互化的計算方法，互化後再認識它們的關係，學生在同一時間認識新的計算方法及新的概念，這對能力稍遜的學生或會造成學習困難。原因是學生在認識分數之前，在整數的世界裏沒有兩個不同的數是數值相等，要他們理解「兩個不同的分數但數值是相等」的概念，不可能要求所有學生都能很快做到。

我們經過以上的分析及討論後，決定在首課題——「分數的種類」，利用以上的開放式問題，加深學生認識三種分數的意義，同時讓他們理解假分數與帶分數的關係，最後才認識互化的計算方法。老師回想過往教授互化的計算方法策略上，表示主要按照書本上的步驟，直接講解計算的方法，然後利用類似的練習鞏固互化的方法。為加強學生理解互化的計算方法，我們利用一些特殊的例子，引導學生從例子中觀察一些規律，探究互化的計算方法，然後協助他們嘗試推廣至其他例子，逐步歸納互化的計算方法。在課堂活動中，我們觀察到大部分學生能透過四、五個特殊的例子，發現計算的規律，自行找出互化的計算方法。學生透過探究活動自行發現的知識，較從直接教授模式學習更能理解及牢記當中的概念 (Bruner, 1961)。Ginsburg (1989) 也指出學生使用自己發現的方法解決問題，會讓他們感到滿意、有意義。在完成兩種互化的探究活動後，即使我們把兩類互化的題目混雜在一起，大部分學生都沒有混淆互化的運算技巧。

在處理下一課題時——「擴分、約分」，雖然課程指引表明「探究擴分及約分的計算方法」，老師表示過往多以直接講解的形式教授，不掌握如何讓學生探究的方法，亦擔心他們未有足夠的能力。然而老師經過在上一課題嘗試探究的教學策略，促使他們對自己及學生加倍信心。因此，我們決定在這課題也嘗試利用探究的方法，引導學生發現擴分及約分的計算方法。

在進行同分母分數加減法計算方面，我們察覺在兩步運算的題目中，若同一時間處理三個分數，算式中的加減符號由原本兩個，增加至五個；而且若題目包含減法時，增至五個的符號則由加減混合組成，學生最容易寫錯位於兩括號中的加號。為避免學生在處理過多的加減符號時出現困難，我們決定在每次運算時只處理兩個分數，而因為計算兩個分數的和或相差時相對





較容易，學生在處理一步運算的題目時已習慣利用心算分別計算整數部分及分子部分，這樣學生就無需添加任何加減符號，寫錯符號的機會就自然減少。例子：

$$6\frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} - 2\frac{2}{5}$$
$$= (6 - 1 - 2) + (\frac{4}{5} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5})$$

同一時間處理  
三個分數，加  
減符號由兩個  
增加至五個。

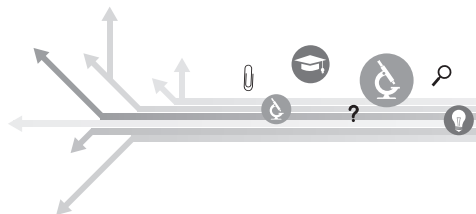
$$6\frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} - 2\frac{2}{5}$$
$$= 5\frac{3}{5} - 2\frac{2}{5}$$
$$= 3\frac{1}{5}$$

每次只處理兩  
個分數，加減  
符號則每次減  
少。

經嘗試以上策略後，學生寫錯加減符號的弊病就自然消除，我們察覺學生在處理兩個分數的加或減時較容易掌握，準確性較高；雖然仍有小部分學生在計算整數部分或分子部分時，偶然會因疏忽而運算錯誤，又或是忘記約簡，但在整體運算上他們再無需為添加「加、減」符號而煩惱，表現較為理想。

學生掌握分數運算後，便進行處理分數的應用題。過往學生需要把分數當作成整數，才能列出算式的奇怪現象，其實不是難以解釋。我們在備課會中嘗試從學生的已有知識與新知識的聯繫分析，發覺兩者有一定的差別。在分數的應用題裏，題目大多牽涉分數應用於日常生活有關度量的問題，例如「元」、「公里」、「米」、「公斤」、「升」、「小時」等度量的單位。而學生從三年級分數基礎概念開始，直至四年級的分數種類、擴分、約分及同分母分數加減等，都以分割一些圖象，例如圓形、正方形、長方形等，認識分數的概念及運算技巧。有時候，老師會把這些圖象比喻成一些食物，例如蛋糕、餅乾等，把分數的問題生活化，讓學生學得更有意義。即是學生在處理分數應用題前，分數的意義從未涉及度量範疇的應用，學生若不理解幾分之幾「米」或幾分之幾「升」等意思，會促使他們在解題方面出現困難。因此，部分學生需要把分數當作成整數，即可思考解決問題的方法。

另一方面，我們在分析書本上分數應用題的題型分布，察覺題目的應用廣泛，每題涉及的度量單位也不同。經商討後，我們考慮到本校學生的能力，認為學生在學習的初期不宜處理變化太多的題型，否則他們還未鞏固好一些知識，而又要處理一些新的問題，造成學習困難。因此，我們重新設計教材，加入新舊知識的聯繫與題型變化兩項因素，讓學生能漸漸從已有的知識，過渡到新的知識；亦減少題型的變化，讓學生循序漸進地學習，先鞏固分數應用於一種的度量單位，然後才應用於其他的度量單位。



例如處理分數應用於長度單位「米」的問題，我們先與學生討論甚麼是「 $\frac{1}{2}$  米」、「 $\frac{3}{4}$  米」、「 $1\frac{1}{2}$  米」等長度的意思，利用實物（米尺）及畫圖方法表達這些長度，讓學生掌握分數應用於「米」的長度後，才與他們討論有關「米」的應用題。學生專注處理「米」的應用題後，然後才認識分數應用於其他度量單位的問題。經老師嘗試新的策略後，我們觀察到學生在處理分數等應用題較過往順利；即使在學習後期的階段，我們把不同度量單位的題型混雜在一起，學生的表現明顯較以往的學生優勝，他們不再依賴把分數當作成整數思考。從學生過往一直以來的表現，我們察覺到學生在分數應用題與整數應用題的表現相若，部分能力稍遜的學生在某些分數應用題出現困難時，經我們分析後，發現他們主要是因為個別题目的意思較為複雜，不理解題意，又或是不理解部分的文字，令致他們不懂列式。

學生的學習困難可以是多樣化，以上提及的策略主要是我們從學生的表現，分析他們對概念理解及運算時出現的學習困難，從而反思學習內容中對數學概念理解所需的層次（例如「怎樣才算理解真分數、假分數及帶分數的意義？」），以及概念與概念或運算技巧之間的關聯，然後思考如何協助學生從認識一個概念後，順利過渡認識相關的概念或運算技巧，再進一步懂得應用這些概念與技巧於日常生活相關的題目。我們希望藉著是次分享會與校外老師交流分數教學的經驗，亦歡迎與會者提出意見，促進彼此的專業成長。

#### 參考資料

1. Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31, 21-32.
2. Ginsburg, H. P. (1989). *Children's arithmetic: How they learn it and how you teach it (2nd ed.)*. Austin, Texas: Pro Ed.
3. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。

