

## 從算術思維過渡到代數思維之路

陳子陽先生 (高級學校發展主任)

陸燕娜老師、蘇于庭老師、嚴龍峯老師 (鳳溪創新小學)

### 思考學生學習「代數」範疇的難點

在小學的第一學習階段，學生在數學科的學習經歷大都是以算術思維為主，他們有相當長的時間都是以算術思維來解答題目，但隨著進入更高的學習階段，從算術思維過渡到代數思維是每一個學生必須面對的。對大多數學生而言，面對這種思維上的過渡，都會存在不同程度的困難，可說是一次挑戰，而且這個過程的長短對不同的學生而言也會存在差異，教師在教學中應首先著重對學生代數思維的培養。

那麼我們的同學在代數範疇的表現又怎樣呢？2012-2013學年「全港系統性評估」(香港考試及評核局，2013)指出小六學生能用符號代表數和解不超過兩步計算的簡易方程，但學生用方程解答應用題方面，仍然有進步空間。

最近，在某次六年級課堂中進行同儕觀課，在這課堂中，老師擬出一道應用題希望學生找出一個長方形的闊度(見圖一)，題目內容如下：

有一長方形，它的周界是50厘米，長度是18厘米，求闊度。



當時差不多全部同學都能很快運用逆算的方法找出答案，但是當老師要求同學運用方程式進行解難時，便發現有不少同學感到束手無策了，當中亦有部份同學用了錯誤的方程式去求解，這說明學生懂得解方程，但學生未必能掌握建立方程去解難，而如何幫助他們建立方程式去解難正是一個值得老師思考的課題。學者陳嘉皇(2006)曾把學生運用方程式解難失敗的個案加以分析，可將之歸納為：

- (一) 無法發現問題情境中變數之間的關係。
- (二) 不理解題意。
- (三) 無法適應複雜情境需要。
- (四) 無法將具體視覺圖像線索轉化成抽象的心智思考解題。

在日常的共同備課的過程中，學校發展主任曾與不少任教五年級及六年級的老師討論過有關如何幫助學生建立代數方程式，他們亦提出他們的學生有類近的學習難點。



## 從算術思維過渡到代數思維

從教學的觀點來看，學者陳嘉皇(2006)提出要幫助學生從算術思維過渡到代數思維，絕非僅是進行大量的算術練習或精熟的符號操演，而是在這兩項為基礎的條件下培養學生建立代數思維。在代數的教學過程中，算術思維的程序性與代數思維扮演的角色同樣重要，這亦是培養學生把這兩種思維的相互協調的過程。

鳳溪創新小學任教六年級的老師發現幫助學生運用算式與建立方程式解難有所不同，幫助學生運用算式的解難是引導他們利用已知的資訊，通過分析和思考直接尋找答案，而幫助學生建立方程式解難是老師讓學生把數學概念結合和理解去列舉方程。另一位學者謝佳叡(2003)認為數學思維可以說是運用數學概念去判斷、推理數學內容，以認識或解決數學問題的心路歷程，其中算術思維與代數思維更展現出某種承接關係。在老師為學生進行的前置知識測試中，發現不少學生學習的難點是源於以往的數學概念不紮實，以致在運用分數數值或小數數值建構方程式時，便遇到困難或建立了錯誤的方程式。

## 從對比類近的方程式中，探討背後表達的意義

在幫助學生建立方程式解難的過程中，老師需要培養學生運用合適的數學概念把變數的性質釐清、並運用解難策略，掌握問題的重點去列舉方程進行解難。在這過程中，老師鼓勵學生透過理解和分辨不同题目的關鍵特徵，從對比不同題型的異同中，掌握不同方程式所表達的意義，從而讓他們運用合適的方法去建構方程式，例如：

方程式	例子
$3X = 36$	黃先生有 36 元，分別放在 3 個錢包內，每個錢包都有相同的款項，求每個錢包有多少元？
$3X + 10 = 36$	黃先生有 36 元，他把 10 元放在手中，他把餘下的款項分別放在 3 個錢包內，每個錢包都有相同的款項，求每個錢包有多少元？
$3(X + 10) = 36$	黃先生有 36 元，分別放在 3 個錢包內，每個錢包都有相同的款項，包括 10 元硬幣和其他面額硬幣，求每個錢包還有多少元？

## 運用前測了解學生其他學習難點

在課堂教學中，老師也嘗試以數學語言的角度看問題，他們意識到學生運用代數式去表達和傳意能力是建立方程式時的重要前置知識，為了清楚同學能否以數學語言作為不同表達方式之間的溝通媒介，我們進行了一次有代數前置知識的評估，內容包括：用代數式的表達能力、解答方程式和建立方程；在分析學生的表現數據後，我們發現同學在運用代數式的表達某些概念時，仍有不少學習難點，請見下圖：

快餐店有  $M$  名員工，其中八分之一是收銀員。  
快餐店有多少名收銀員？

學生選項

A.  $\frac{8}{M}$   
 B.  $8M$   
 C.  $\frac{M}{8}$   
 D.  $\frac{1}{8M}$

	6A	6B	6C	6D
A	4	10	7	6
B	0	0	0	0
C	23	17	6	8
D	6	4	8	8

示例一

從示例一，我們發現有部份學生未能運用正確的代數式表達除法概念，為了提升學生建立正確的代數式，在教學過程中，我們著意培養學生貫徹數學語言解釋圖像、算式和文字情境之間的關係，建立他們在第二學習階段學習代數的信心，老師透過比較、推理和對比等去鼓勵學生運用語言去解釋代數式，例如： $\frac{X}{5}+2$ 、 $\frac{X+2}{5}$  和  $\frac{1}{5}X+2$ ；我們希望能幫助學生把算術思維透過具體的描述過渡至抽象代數思維，從而建立有系統的解難方法。

在幫助學生分辨被除數和除數及被減數和減數的表達方式方面，我們鼓勵他們以圖像表達不同題型的意義，並從不同圖像中找出相似題型的相關之處，也要求學生連繫圖像、算式及文字情境所表達的意義，從而深入理解當中的概念，例如： $\frac{X}{5}$  和  $\frac{5}{X}$ 、 $2X$  和  $(X+2)$ 、 $\frac{X}{4}$  和  $(X-4)$  的分別。

除此之外，從前置知識評估中，我們亦發展學生在設題、建立方程式及解方程時，存在不同的學習難點，從示例二，我們察覺到祇有不及一半的學生能成功做到用解方程的方法找到答案。

某數除以 7 後加 14 等於 28。用解方程的方法，求該數。

(列方程計算)

6A：有 23 名學生有設題，28 名學生能正確訂出方程，當中有 15 名學生能成功解方程。

6B：大部份學生未有設題。有 19 名學生能正確訂出方程，當中有 5 名學生能成功解方程。

6C：只有 8 名學生能正確訂出方程。

6D：大部份學生未有設題。有 9 名學生能正確訂出方程，當中有 2 名學生能成功解方程。

#### 示例二

## 總結教學經驗

整體而言，老師就建立代數方程式這課題的不同難點作了深入的探討，經過多次反覆的思考，他們除了運用圖像和數學語言來貫通學生的概念建構過程外，亦在教學時嘗試採用天秤實物操作活動，讓學生透過實際操作天秤，幫助學生藉着增減砝碼的過程中從具體過渡到抽象，培養他們理解情境中資料的關係，體驗用代數符號去表示問題的情境和建立「對等」的意義，進而根據情境的表徵建構方程式。在老師的專業發展方面，他們亦累積了一些設計活動的經驗，其中，老師們認識到合適的代數推理活動、代數式的差異辨析、概念意義的表達以及方程式的建立等均可為幫助學生從算術思維過渡到代數思維。我們期望透過是次研討會和大家分享有關探討這課題時的經歷，包括前測卷的設計理念、老師如何從前測數據分析學生難點到設計教學的經歷，我們亦會以課堂片段、教育測量模型 Rasch Model 診斷個別學生在運用代數式的能力、學習難點及對比學生的前測和後測的數據，並闡釋學生在學習過程中的表現及轉變。

## 參考資料

1. 香港考試及評核局 (2013)。2013 年全港系統性評估學生基本能力報告。香港：香港考試及評核局。
2. 陳嘉皇 (2006)。國小五年級學童代數推理策略應用之研究：以「圖卡覆蓋」解題情境歸納算式關係為例，屏東教育大學學報，25(9)，381-412。
3. 謝佳叡 (2003)。從算術思維過渡到代數思維。九年一貫課程綱要諮詢小組諮詢意見書。線上檢索日期：2013 年 07 月 12 日。網址：[http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/\\_private/mathedu/me9/nineyear/philosophy/Appendix\\_A2.doc](http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me9/nineyear/philosophy/Appendix_A2.doc)

