

從算術思維過渡到代數思維之路

陳子陽先生 (小學校本課程發展組)

陸燕娜老師 (鳳溪創新小學)

蘇于庭老師 (鳳溪創新小學)

嚴龍峰老師 (鳳溪創新小學)

代數的確是一門很有威力的數學.....

「代數」是一門「快樂的數學」，你可以馬上利用它來解許多難題，.....

我現在認為二十世紀快要結束，二十一世紀將到，重要的該學的知識越來越多，我們是應該把代數放在小學三年級來教了。

--- 1980，李數學。〈代數的用處〉，《數學和數學家的故事》第三集

http://www.hkedcity.net/iclub_files/a/1/41/webpage/topics/Wong_Yuen_Shing.htm

美國數學教師協會(NCTM)出版的《The Idea of Algebra, K-12(1988)》一書提出以下有關代數教學的概念：

1. 代數是對算術的歸納

例如： $2+6=6+2$ 、 $3+2=2+3$ 的加法交換性質可用代數歸納為 $a+b=b+a$ 來表示。
代數能幫助我們用語言來表達數學內容。

2. 代數是數量關係的一種學習

例如： $A = LW$ (矩形面積 = 長 \times 闊)
代數式可清晰表達各數量的關係。

3. 代數是解決問題的學習

例如：某數的2倍加3等於25，求某數。 $(2y + 3 = 25)$
可利用代數將問題具體化。

http://www.hkedcity.net/iclub_files/a/1/41/webpage/topics/Wong_Yuen_Shing.htm

在小學引入代數初步的知識總括有下列的目的和意義：

1. 有利於學生從算術的方法轉變為代數的方法去解決問題

以往的小學數學中**算術應用題**教學所佔的比重頗大，學生要用很多時間去解算四則應用題。有些課題解說頗為困難，又需要強記很多公式。

2. 有利於加強中小數學的銜接

除了在內容上有很多不同的地方外，其思路也不一樣。因此，從小學升入中學在思維方法上很容易脫了節，特別在解應用題時，本應要通過找等量關係列方程，但由於學生在小學算術學習中已形成很強的思維定勢，還是不由自主地去思考如何列算式。這就給代數學習造成了不必要的障礙。

在小學開始學習代數初步知識，培養學生代數方面的思維方法，這對學生在中學學習數學創造了有利的條件，使小學、中學的數學學習得以平滑過渡。

3. 有利於思維能力的培養

用這些代數式來記公式，表達定律、說明數學思路，既清晰，又概括，這正是**數學思維**---找出事物的規律和把事物從**複雜**化整到**簡明**。在小學數學中引入代數初步知識可以提早使小學生的思維從**具體的『量』**過渡到**抽象的『數』**，有利於培養小學生的**抽象思維能力**。從以上分析，代數在小學數學課程佔了一定的地位。

學生從算術思維過渡到代數思維的難點

學者陳嘉皇(2006)曾把學生運用方程式解難失敗的個案加以分析，可將之歸納為：

1. 無法發現問題情境中變數之間的關係。
2. 不理解題意。
3. 無法適應複雜情境需要。
4. 無法將具體視覺圖像線索轉化成抽象的心智思考解題。

課堂觀察：

1. 學生不清楚要學習代數
2. 學生慣於採用用逆向思維解決問題

學生們在代數範疇的表現

2012-2013學年「全港系統性評估」(香港考試及評核局, 2013)

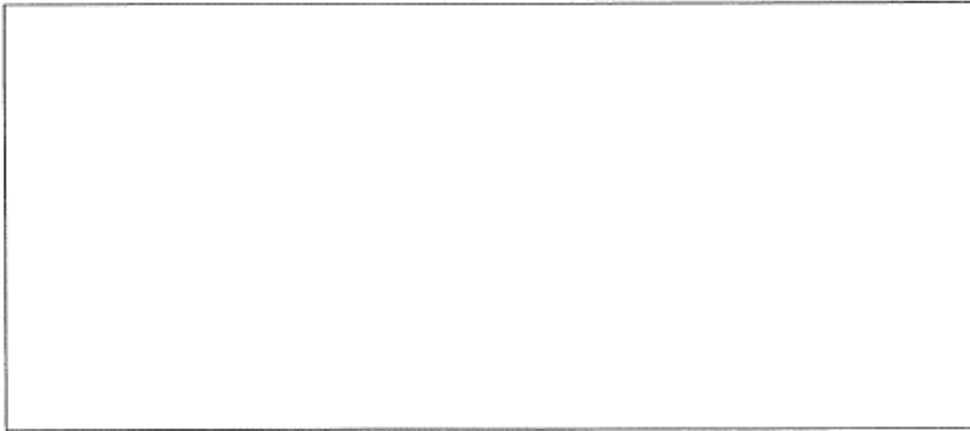
小六：學生能用符號代表數和解不超過兩步計算的簡易方程，但學生用方程解答應用題方面，仍然有進步空間。

中三：一元一次方程：大部分學生能由情境中建立一元一次方程。在解方程上，若方程中涉及分數時，學生表現稍遜。

2010 6M1 Q39, 6M2 Q41

弟弟有零用錢 80 元，哥哥零用錢的 $\frac{2}{5}$ 比弟弟的多 10 元。哥哥的零用錢是多少元？

(列方程計算)



Q39(1) 44.8% Q39(2) 42.2% Q39(3) 40.3%
Q41(1) 44.8% Q41(2) 42.2% Q41(3) 40.3%

從課程的縱向發展的角度看「代數」範疇

2. 學習重點建議

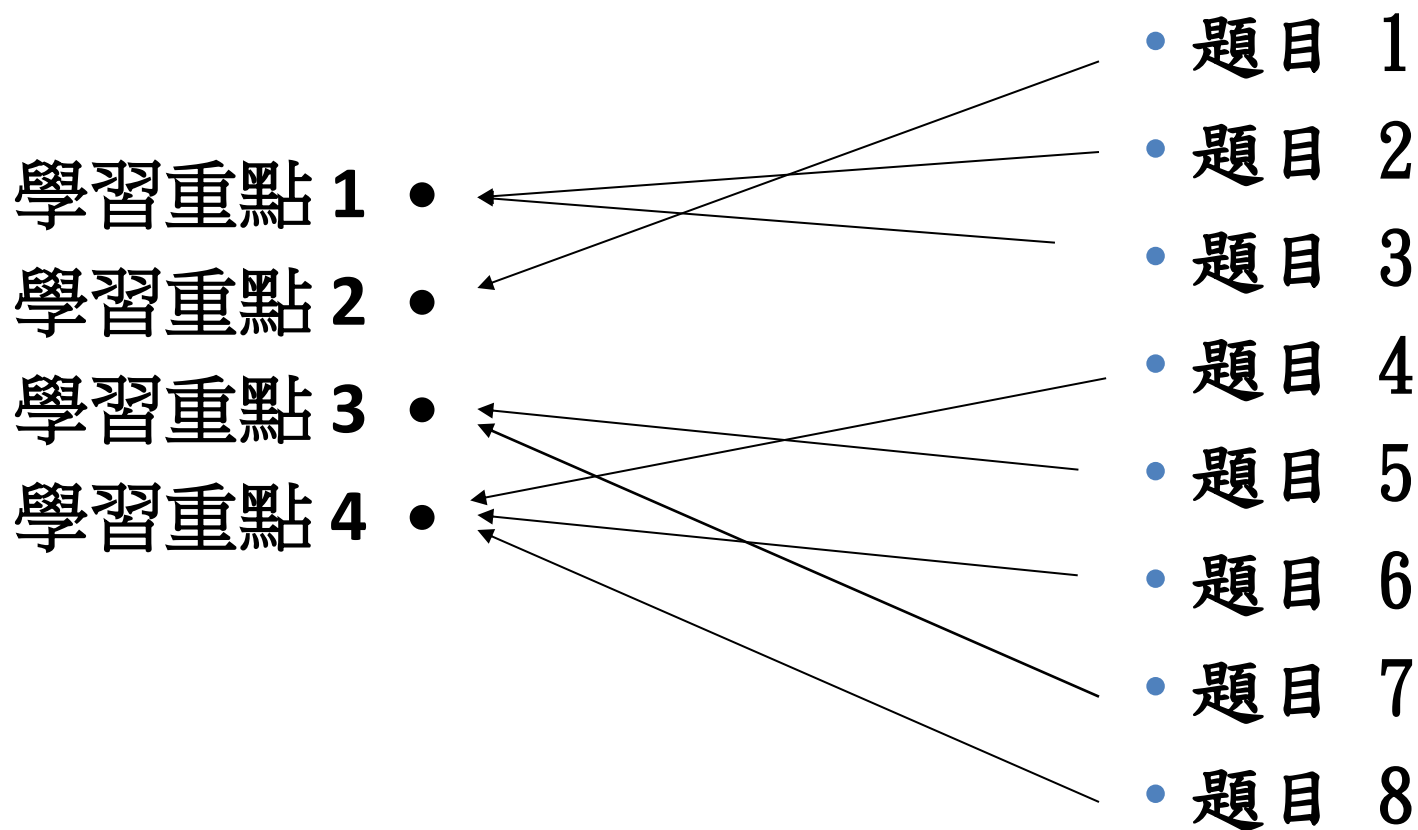
六年級下學期

單位	學習重點	建議節數
範疇：數		
6N4 百分數（二）	1. 解答簡單百分率應用題，包括： <ol style="list-style-type: none"> 求百分率； 根據百分率求出數值； 折扣。 2. 估計計算結果。	24
範疇：圖形與空間		
6S2 圓	1. 認識圓的特性及圓心、半徑、直徑和圓周。 2. 用不同的方法作圓。	6
範疇：度量		
6M2 周界（二）	1. 認識圓周。 2. 探究圓周與直徑和半徑的關係。 3. 認識圓周率「 π 」。 4. 認識古代中國數學家找出圓周率的故事。 5. 應用圓周的公式。 備註： 不著重數學家如何計算圓周率，而著重中國數學家在這方面的貢獻。	6

六年級下學期

單位	學習重點	建議節數
範疇：度量		
6M3 速率	1. 認識速率的概念。 2. 以「米每秒」(m/s)或「公里每小時」(km/h)作為速率的單位。 3. 閱讀行程圖。 4. 解答簡單應用題。 備註： 應用題不包括追趕的計算。	10
範疇：數據處理		
6D3 折線圖	1. 閱讀及討論折線圖。 2. 製作折線圖。	8
範疇：代數		
6A1 簡易方程（二）	1. 解兩步計算的簡易方程，並驗算結果。 2. 用簡易方程解答應用題（只限於兩步計算）。 備註： 不包括同類項運算。	15

評估工具的效度



前測的發現

2. 快餐店有 M 名員工，其中八分之一是收銀員。
快餐店有多少名收銀員？

- A. $\frac{8}{M}$
- B. $8M$
- C. $\frac{M}{8}$
- D. $\frac{1}{8M}$

	6A	6B	6C	6D
A	4	10	7	6
B	0	0	0	0
C	23	17	6	8
D	6	4	8	8

23.

某數除以 7 後加 14 等於 28。用解方程的方法，求該數。

(列方程計算)

6A: 有 23 名學生有設題，28 名學生能正確訂出方程，當中有 15 名學生能成功解方程。

6B: 大部份學生未有設題。有 19 名學生能正確訂出方程，當中有 5 名學生能成功解方程。

6C: 只有 8 名學生能正確訂出方程。

6D: 大部份學生未有設題。有 9 名學生能正確訂出方程，當中有 2 名學生能成功解方程。

從代數式開始

代數式－比較異同

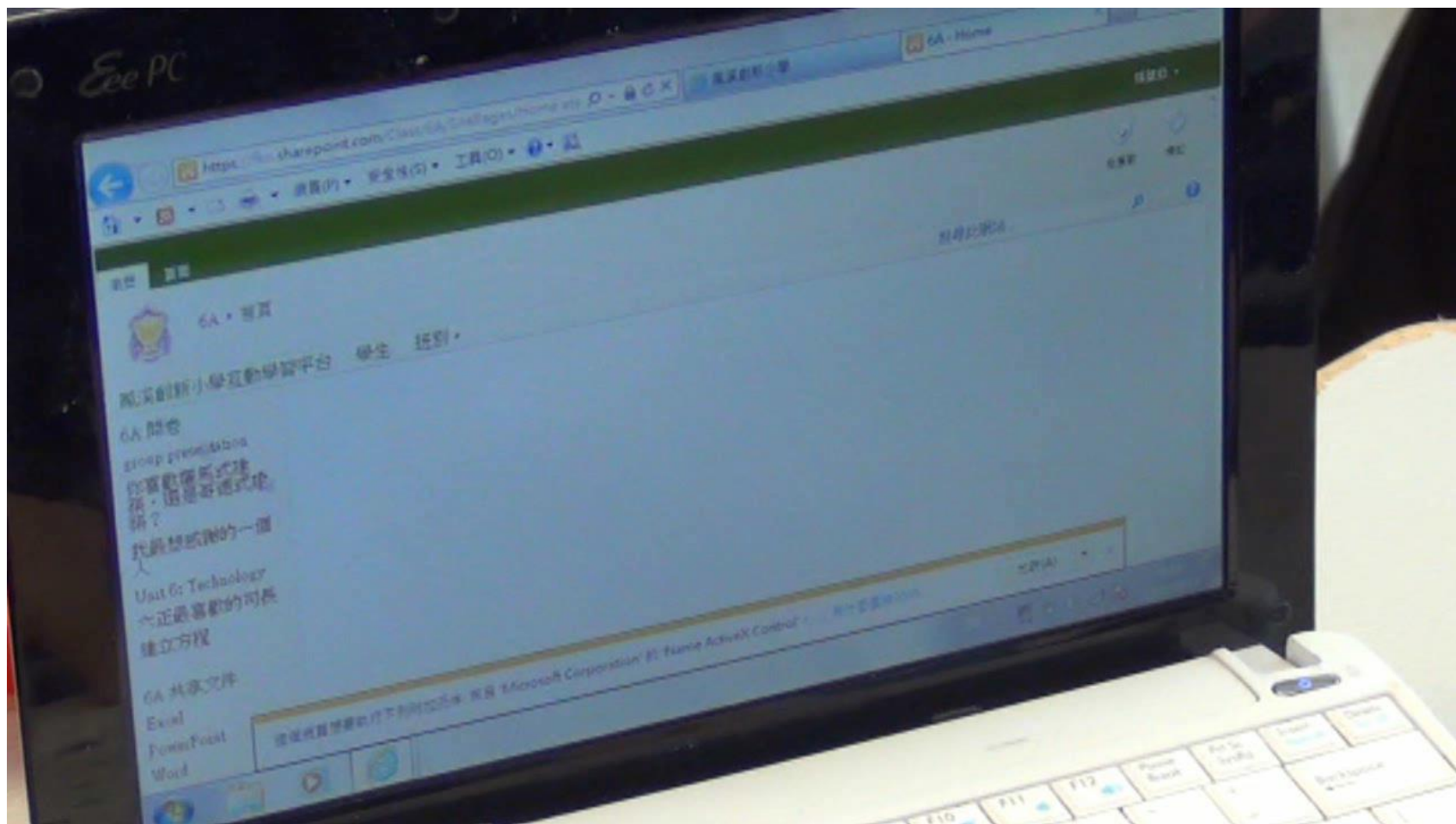
1. 黃大富先生有**A**元，分給**40**位同學，每位同學有多少元？
2. 黃大富先生有**40**元，分給**A**位同學，每位同學有多少元？
3. 黃大富先生有**40**元，用了**A**元後，求他有多少元？
4. 黃大富先生有**A**元，用了**40**元後，求他有多少元？

代數式—比較異同

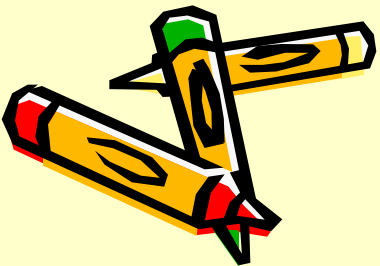
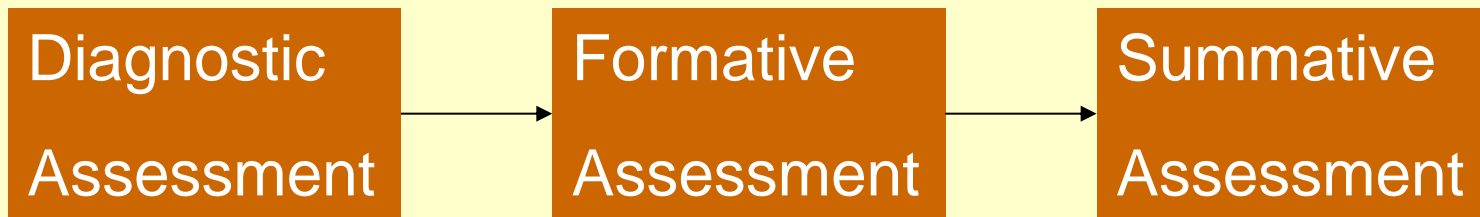
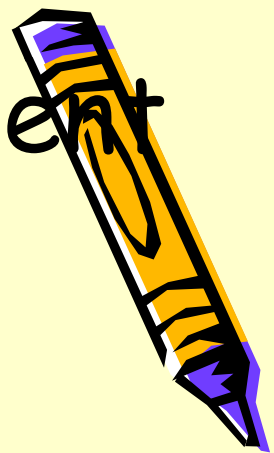
5. 黃大富先生有40元，用了A元後，分給8位同學，問每位同學有多少元？
6. 黃大富先生有A元，分給8位同學，每位同學用了40元後，問他們每人有多少元？
7. 爸爸有X元，媽媽有的金錢是爸爸的3倍，媽媽有多少元？
8. 爸爸有X元，妹妹有的金錢是爸爸的 $\frac{1}{4}$ ，妹妹有多少元？

從討論中深化學習

運用資訊科技檢視學生的學習難點



What does formative assessment look like in practice ?



何時介入？

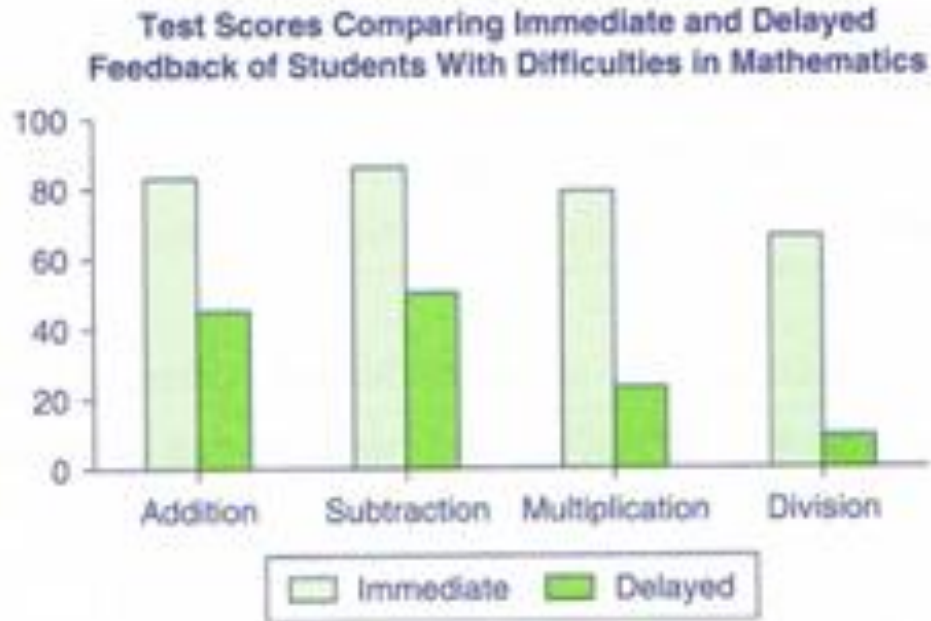
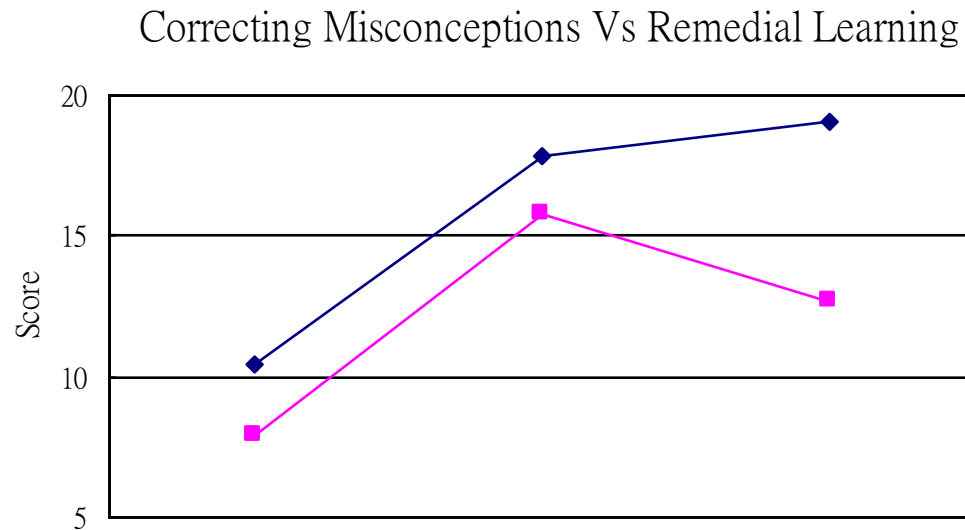
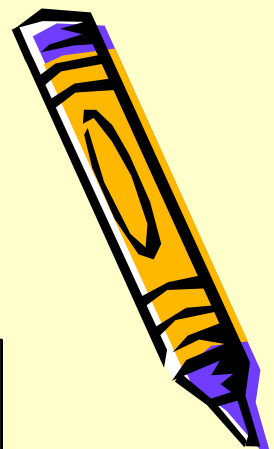
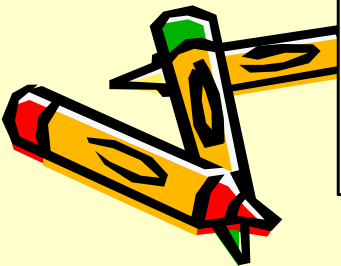


Figure 7.7 The graph compares the average scores of students with mathematics difficulties on tests of arithmetic operations receiving immediate or delayed feedback on their performance. (Adapted from Brosvic et al., 2006)

One study by Alan Bell and Malcolm Swan found that students whose teachers addressed and corrected misconceptions, rather than simply using remedial measures, achieved and maintained higher long-term learning result (see findings below)



- ◆ Students who were taught by addressing misconceptions
- Students who were taught by using remedial materials



透過自擬題目鞏固代數式概念

建立方程式

Setting up equations is like translation from one language into another. Teach to think. Teach to understand. Guess and Test (George Polya)

從對比開始



規範性應用



非規範性應用

從對比不同題型的異同中，掌握不同方程式所表達的意義：

方程式

例子

$$3X = 36$$

黃先生有 36 元，分別放在 3 個錢包內，每個錢包都有相同的款項，求每個錢包有多少元？

$$3X + 10 = 36$$

黃先生有 36 元，他把 10 元放在手中，他把餘下的款項分別放在 3 個錢包內，每個錢包都有相同的款項，求每個錢包有多少元？

$$3(X + 10) = 36$$

黃先生有 36 元，分別放在 3 個錢包內，每個錢包都有相同的款項，包括 10 元硬幣和其他面額硬幣，求每個錢包還有多少元？

規範性應用

規範性應用

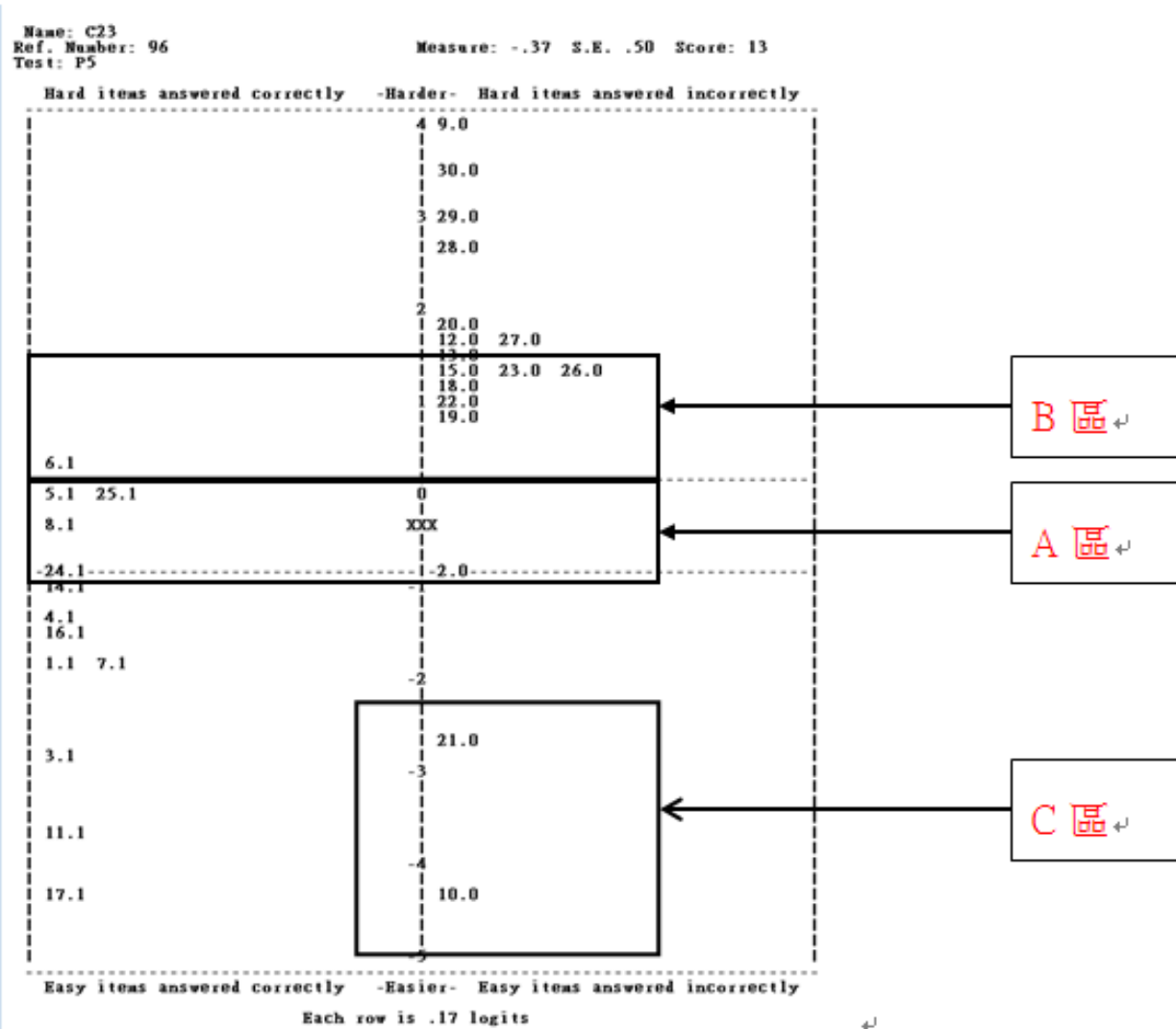
前、後測等化比較

TABLE 1.0 FKIS Equating ZOU655WS.TXT Mar 19 11:42 2014
 INPUT: 231 Person 64 Item REPORTED: 228 Person 64 Item 128 CATS WINSTEPS 3.75.0

MEASURE	Person - MAP - Item																																																																							
	A02	A11	A17	A37	A38	B25	D07	D10	D12	F02	F11	F17	F37	F38	Q25	S07	S10	S12	<more><rare>																																																					
100																																																																								
90																			P07	P08	F12	F23	F24	F28	F30	F32	F35																																													
80																			A04	A07	A08	A12	A13	A23	A24	A28	A30	A32	A35	D01	S05																																									
70																																					P03	F10	F19	F22	F26	Q06	Q28	S04	S05																											
60																																					F13	F14	F15	F21	F25	A05	A06	B04	B28	B29	D04	D05	S02																							
50																			A03	A10	A19	A22	A25	A26	A31	A34	A36	B05	B06	B09	D14	F01	F09	F31	Q04	Q21	Q30	S14	S23																																	
40																			A14	A15	A21	B11	B17	B20	B21	B30	B34	D02	D03	D15	D18	D20	D22	D23	F16	F27	Q07	Q19	Q34	S20	S22																															
30																																											A01	A09	A16	B02	B22	D06	F18	Q01	Q17	Q22	Q33	S03	S15	M1	X23a	Y12														
20																																												Q02	Q12	Q14	Q23	S06	X28c	Y28c																						
																			B07	B10	B14	B19	B33	C10	F29	Q08	Q10	Q24	Q31	Q32	R19	X12	Y21a	Y25c																																						
																			A18	A20	A27	B01	B03	B13	B32	C05	C19	C21	F20	R05	R10	Y24b	Y2	Y25b	Y28b																																					
																																											A29	A33	B12	D19	D21	+S	X22	Y2	Y25b	Y28b																				
																																											B08	B23	B24	B31	D16	D17	Q18	Q18	S13	X24d	Y20b	Y15	Y9																	
																																											B18	R03	S11	S17	S21	X21	Y1	Y16																						
																																											Q13	Q27	R22	S16	X15	X2Y4	X9																							
																																											C08	D11	D13	R08	R09	R20	X1	X16																						
																																											C03	R15	S13	S1	X19	Y28a	Y6																							
																																											B27	C22	Q26	R12	Y18	Y28a	Y6																							
																																											C15	Q16	R07	R13	+M	X10Y19	Y14	Y24a(1)	Y26																					
																																											B15	C20	R04	X24b	X6	X18	Y20a	Y24a(2)	Y25a	Y8																				
																																											C13	R02	X13Y5	X4	Y20a	Y24a(2)	Y25a	Y8																						
																			B16	B26	C02	C07	C12	R01	R16	R17	X20	X23Y27	X24c	X8	Y11																																									
																																											C04	C16	R11	Y23a	Y23a	Y17	Y22b																							
																																											+S	X11	Y17	Y22b																										
																																											C01	C17	T1	X17	X23c	Y7																								
																																											C11	R06	T1	X17	X23c	Y7																								
																																											C06	X7	Y22a																											
																																											X3	X3b																												
																																											R18	X5																												
																																											C18	X5																												
																																												X5																												
																																												X5																												
																																												X5																												



個別學生的回饋



下一步：發展自主學習

透過電子書包，幫助學生進行拔尖補底的工作，實踐從自學到自主學習。

下一步

促進學習遷移，鼓勵學生運用已習得的知識深化。

一、求售價：↵

1. 果汁糖一包定價/原價 \$50，現九折出售，現售：↵

公式：_____ X _____ = _____ ↵

所以：_____ = _____ ↵

↵

二、求定價/原價：↵

2. 皮鞋現八折出售，現售 800 元，原價是：↵

↵

↵

↵

↵

↵

想一想：用甚麼方法找出來？↵