

四則混合之困 — 解答四則混合應用題的策略

李潤強先生 (高級學校發展主任)

樊文輝老師、揭冠凌老師、鄭宇茵老師 (將軍澳循道衛理小學)

小學數學的應用題分佈在多個範疇裏，各年級的題型有著不同的重點。本分享會著重分享與將軍澳循道衛理小學老師共同發展小四解答四則混合應用題的教學策略，針對學生的困難及課程重點，協助學生從一步運算應用題，逐步掌握兩步或以上運算的四則應用題。

解答應用題是小學數學課程的重要部分，不同類型的應用題遍佈在一至六年級多個單元裏，當中的題型包括「一步運算的四則應用題」、「兩步或以上運算的四則混合應用題」、「小數四則應用題」、「分數四則應用題」等。

在教授不同年級的應用題時，學生均會出現不同的困難。例如在初小階段，由於普遍學生識字量有限，語文能力不足以理解整道題目的意思，再加上他們在審題時態度輕率，只看部分關鍵字詞及數字便列式計算，以致計算錯誤。

學生在認識加、減、乘、除的四則應用題期間，他們需逐步處理混合應用題。例如：在小二加、減課題中，學生開始解答加減混合應用題；在小三課題中，引入小括號於乘加、乘減混合應用題；繼而在小四的課題中，引入除加、除減、乘除混合應用題，以及進一步引入四則混合應用題（香港課程發展議會，2000）。解答混合應用題的算式中，由兩部或以上的運算組成，題目內容較過往一步運算應用題複雜，牽涉較多詞彙、句子及資料，並要求學生較高層次的思維能力，以及語文理解能力。

從過往支援學校發展數學科校本課程經驗中，普遍學生從一步運算應用題，過渡到兩步或以上運算應用題時感到不少困難，他們難以列寫一道多步運算的算式解決問題。即使學生能解答大部分一步運算應用題，能準確判斷運算方法及列寫算式，但當他們面對多步四則混合應用題時，他們就難以解答。

學生的困難可以有著不同的原因，其中一個較普遍的現象是由於他們的語文能力薄弱所致，只靠辨認題目中部分的辭彙，未有理解整道題意，便列寫計算方法。例如看見「共有」、「合共」便使用加法；看見「餘下」、「還餘」、「吃去」、「應找回」便使用減法等。他們在解答應用題時未有認真閱讀題目、思考題意及分析資料，只從關鍵字便決定運算的方法。以下是一些四則應用題例子：

一步運算應用題例子：

圖書一本售 26 元，小明付 100 元買圖書一本，店員應找回多少元？

店員應找回：

$$\begin{aligned} &100-26 \\ &= \underline{74} \text{ (元)} \end{aligned}$$



部分學生看見題目中的「應找回」，便使用減法。在處理常規性一步運算應用題時，他們的答對率還算理想，但當遇到多步運算的應用題時，關鍵字再難以告知他們多步運算的方法，他們的表現就自然地顯著下滑。

兩步運算應用題例子：

圖書兩本售 26 元，小明付 100 元買圖書一本，店員應找回多少元？

店員應找回：

$$100 - 26 \div 2 \\ = \underline{87 \text{ (元)}}$$

若學生在處理以上題目時未能理解整道題目的意思，只從關鍵詞「應找回」便想出減法，他們可能只列寫「 $100 - 26$ 」這道橫式，未曾想到除法的應用。部分學生即使想到先利用除法找出一本書的售價是「 $26 \div 2$ 」，然後在處理與100元相減時，沒有注意到橫式應是「付出的100元」減去「一本書的售價」，誤寫上「 $26 \div 2 - 100$ 」，這可能是他們先想出「 $26 \div 2$ 」，就把它先寫出來，在處理3個數據與除、減運算符號時感到混亂，未能準確地列出計算的次序。

三步運算應用題例子：

圖書每本售 26 元，現特價發售，買滿 2 本即每本減價 4 元，小明買了圖書 3 本，並找回 34 元，小明付給店主多少元？

小明付給店主：

$$(26 - 4) \times 3 + 34 \\ = \underline{100 \text{ (元)}}$$

以上的三步運算應用題包含5個數據，但橫式只需使用其中4個，題意又較以上一步運算應用題例子及兩步運算應用題例子更為複雜。學生如不理解買了3本圖書，每本減價4元，就無法列出橫式的前半部分；另一方面，學生如看見「找回34元」，便聯想利用減法計算，就無法準確地列出橫式的後半部分。

以上分析了學生因語文能力薄弱，對處理一步至多步運算應用題時出現的困難，也解釋了為何部分學生在初小的數學成績理想，但當升讀小四後就成績顯著退步。因此，培養學生認真審題的態度，提升學生理解數學語言的能力、解難能力等，是初小發展應用題教學策略的重要目標。本人曾於「以行求知——教學·學教」研討會（教育局，2011）分享「初小解答應用題縱向策略發展」，提出學生透過「解題四步曲」加強讀題及解題的訓練；繼而透過「小組討論」互相刺激思考，把各人的誤解愈辨愈清，從而提升他們的解難能力；然後再透過「自擬應用題」提升學生的學習動機，以及進一步提升更高層次的思維能力。

另一方面，多步運算應用題確實包含較多文字、資料及數據，情境較為複雜，能力稍遜的學生往往難以理解題意及分析多個數據的運算方法。在引入這類題型時，教師常以分步列式的方法，例如把兩步運算的應用題分成兩道一步運算的橫式解答，讓學生較易理解，然後再討論如何由分步列式，轉變成



一道橫式作答。從參閱各出版社的教科書相關單元中，課文內容非常相似，它們都利用日常生活的事例引入兩步運算的應用題，在首題的例子中，課文先講解較易的處理方法，就是分步列式計算，然後再講解以一道多步運算的橫式計算；然而，往後的例子及練習都要求學生以一道橫式解答問題。從過往學生的表現得知，即使部分有信心處理一步運算應用題的學生，他們在思考一道多步運算的橫式時也會感到困難，而能力稍遜的學生更感到無從入手。

過往曾與教師討論該課題，部分經驗教師表示會多讓能力稍遜的學生以分步列式計算，讓他們鞏固後，才鼓勵他們列寫一道橫式作答。然而，不是每人都能在短時間內順利過渡，能以一道橫式作答，不少學生對此課題仍感到非常困難。從教授該單元的課時考慮，一般學校在小三及小四的四則混合應用題單元中，安排約二至三星期完成授課。在這樣的情況下，我們自然期望學生在這二至三星期內能以一道橫式作答。究竟學生難點的出現是由於我們期望過高（學生需要較長時間掌握以一道橫式作答，才是正常的現象。）還是我們的教學策略仍有很大的改善空間？

加強一步運算四則綜合應用題練習

將軍澳循道衛理小學老師與本組共同協作發展小四數學科校本課程時，教師表示過往很多學生在處理四則混合應用題都感到特別困難。在備課會中，我們嘗試從不同的角度思考學生的學習困難，包括反思過往的教學策略及教師的期望，從而思考適合學生的學習方法，提升學與教的成效。首先，我們從學生的已有知識考慮，學生需具備哪些知識才能掌握四則混合應用題？我們認同學生必須掌握一步運算的四則應用題，能夠從一些綜合的題型，辨別正確的運算方法。因此，教師在教授四則混合應用題前，可加強一步運算的四則應用題綜合練習，取代部分於乘法及除法單元中，單一運算的應用題，藉以刺激學生的思考空間。

重溫四則運算的基礎概念與應用

學生在處理綜合練習時，能力稍遜的學生表現常欠理想，對於一些較多學生犯錯的題目，教師會在課堂上跟進他們的困難。然而，只是分析個別題目，對學生處理其他題目時有否幫助？若題目的內容、情景、資料、問題等與之前討論的題目差異很大，學生能否靈活地運用已學的知識？究竟他們如何判斷使用加、減、乘或除法？為進一步協助學生認清使用四則運算的應用，教師可與學生透過討論，從宏觀的角度或普遍的情況，總結四則運算應用的原則。例如透過觀察多道乘法應用題例子，我們察覺到這些題目的共同特點，都是找出一個數的倍數，然後我們利用一些簡單的數學語言，總結使用乘法的原則——「如果題目是找一個數的倍數，就可使用乘法解答」。最後，我們總結了四則運算應用的原則如下：

1. 加法：如果題目是找「兩數合共多少」，就可使用加法解答。
2. 減法：如果題目是「取去、餘下」或「找兩數相差」，就可使用減法解答。
3. 乘法：如果題目是找「一個數的倍數」，就可使用乘法解答。
4. 除法：如果題目是需要「分物」、「平均分」或「包含分」，就可使用除法解答。



以上原因其實是四則運算的基礎概念，我們透過與學生討論及分析，重溫四則運算的基礎概念與應用，再加以一些簡單的數學語言，協助他們分析四則應用題的運算方法。例如：

「一艘帆船可載客80人，現有帆船12艘，共可載客多少人？」

部分靠認關鍵詞的學生會利用加法計算「 $80 + 12$ 」，為協助他們分析應用題的運算方法，教師先提問學生題目中每句的意思，查考有否學生因不理解字詞而導致列式錯誤；然後再透過提問分析解答的方法：

1. 要找出「共可載客多少人？」，是否要找「80人」與「12艘帆船」合共多少？（先讓學生明白不應該是「 $80 + 12$ 」，然後再討論正確的計算方法。）
2. 要找出「80人的12倍」？還是「12艘帆船的8倍」？（學生如不理解，教師可利用畫圖的方法，把情景以圖像化形式表達，讓他們較容易理解題意，有助他們分析計算的方法。）

最後歸納出要找出「共可載客多少人？」，我們需求出「80人的12倍」，所以橫式應是「 80×12 」。

把資料以圖像表達，有助理解題意

過往很多教師都會利用畫圖的方法解釋應用題，或要求學生透過畫圖理解題意。回顧過往的經驗中，教師沒有規範學生的畫圖方法，讓他們自由地繪畫题目的意思。在開放的情況下，很多學生會在繪畫圖像中，加上一些運算符號協助表達題意，但在圖像中的運算符號未必與橫式中的運算符號相同。例子如下：

2. 厚堅負責買三文治，他買了15件三文治，共付120元，請問三文治每一件多少元？

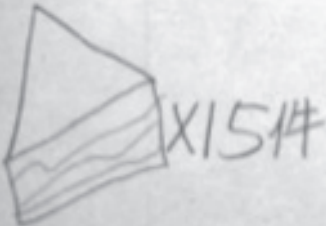
<p>圖：</p> 	<p>列式：</p> <p>請問三文治每一件</p> $\frac{120}{15} = 8(\text{元})$	<p>直式：</p> $\begin{array}{r} 8 \\ 15 \overline{) 120} \\ \underline{120} \\ 0 \end{array}$
---	---	--

圖 1



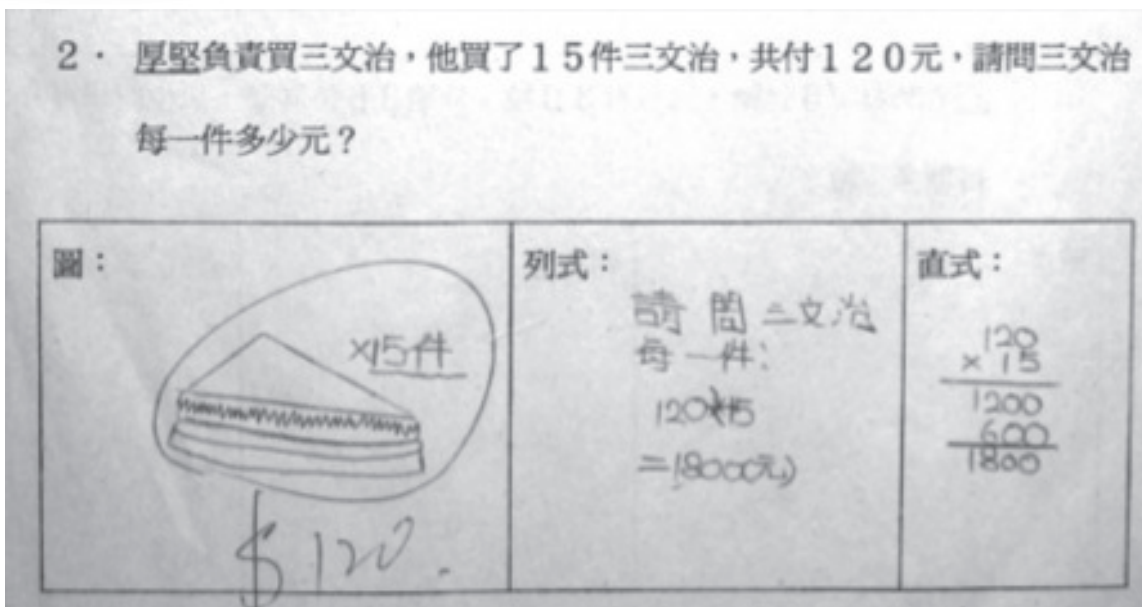
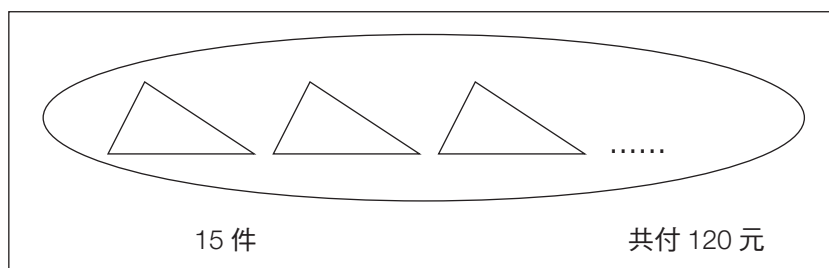


圖 2

以上兩幅圖的學生都利用「 $\times 15$ 件」表示15件三文治，但正確的橫式是「 $120 \div 15$ 」，沒有乘法在內。能力高的學生（如圖1的學生）能理解題意後，列出正確的橫式；然而能力稍遜的學生（如圖2的學生）可能會被圖像中的乘號擾亂，誤以為使用乘法計算。

為避免圖像中的運算符號擾亂學生的思考，我們要求他們不應在繪圖時加入任何運算符號，利用圖像、文字、標點符號等，足以表達題目的情景與資料。以上例子建議繪畫成如下：



我們鼓勵能力稍遜的學生，利用圖像理解題目提供的資料，然後再因應問題的要求，思考計算的方法。我們察覺能力稍遜的學生在面對一堆文字及數字時，會感到困難，看圖理解會感到較為容易，有助分析資料。畫圖策略對多步運算四則應用題更為有效，原因是這類題型都包含較多文字及數字，對語文能力稍遜的學生造成極大的困難。

利用「答題」表達答案

當學生認識四則混合應用題單元時（除加、除減、乘除及四則應用題），我們讓學生選擇分部列式計算或一道橫式計算，希望他們能因應自己的能力循序漸進地發展，避免一些能力稍遜的學生，未能列寫一道橫式而放棄解答。然而，如學生使用「題解」方法表達答案，我們察覺到他們在列寫第一道橫式的「題解」時感到困難，原因是題目沒有提供，需由學生自行思考。即使學生能判斷計算的方法，但他們可能因為語文能力稍遜，未能寫出「題解」，導致阻礙解答問題。

從過往與其他學校發展校本課程經驗得知，普遍學生在解答應用題時，感到利用「答題」比「解題」方法較容易掌握，相信主要原因是「答題」是以完整句子表達答案，而「解題」並非完整句子，學生難以理解當中的意思，特別是導致初小學生感到困難。因此，我們讓學生利用「答題」的方法表達答案。

利用「答題」的方法表達答案，我們參考了星加坡的數學書 Discover Maths (Law & Sachidanandan, 2007) 的方法。星加坡的小學數學課程在小三已包含兩步運算的四則混合應用題，小四課程包含三步運算的四則混合應用題。無論在兩步或三步運算的四則混合應用題中，全都利用分部列式方法，原因是當地課程於小五才引入「先乘除，後加減」的計算法則，學生在小五時才學習利用一道橫式解答問題。而當地數學教材都以英語編寫，應用題都利用「答題」的方法表達答案。在小三及小四的四則混合應用題中，無論兩步或三步運算應用題，學生只需在最後答案才需寫出「答題」，之前的算式結果無需以「答題」表達。這樣的表達形式減少「答題」次數，有利語文能力稍遜的學生學習。

在思考我們的策略時，為照顧不同能力的學生學習，我們希望能力高的學生能準確運算及表達清晰的解答，能力稍遜的學生亦能準確運算，而在表達形式上可參照星加坡數學書 Discover Maths (Law & Sachidanandan, 2007) 的方法，在最後的答案裏以「答題」表達計算結果。因此，在教授除加、除減及乘除混合應用題時，我們鼓勵學生於每步以「答題」表達計算結果，然後觀察學生的表現。在最後部分的四則混合應用題單元中，包含三步或四步運算的題目，我們讓語文能力稍遜的學生只在最後的答案裏以「答題」表達計算結果，以減少在語文表達方面的障礙。

加強「歸一法」概念

另一方面，在乘除混合應用題單元中，我們加強「歸一法」的概念，加強學生認識除法在日常生活的應用，有助他們處理乘除混合應用題。原因是很多以日常生活背景的應用題，都是利用「歸一法」處理部分的資料，例如：「蘋果3個售21元，媽媽買蘋果5個，需付多少元？」，問題要求5個蘋果的售價，我們需先找出一個蘋果的價錢，利用「歸一法」就可以找出一個蘋果的價錢。過往很多協作學校引入「歸一法」的概念後，教師都表示有助學生解答相關的應用題。

學生的學習困難可以是多樣化的，以上提及的策略主要是我們從學生的表現，分析他們對解答四則混合應用題時出現的學習困難，從而反思我們的教學策略。我們希望藉著是次分享會與校外教師交流教學的經驗，亦歡迎與會者提出意見，促進彼此的專業成長。

參考資料

1. Law C. H., & Sachidanandan, R. (2007). *Discover Maths 3A, 4A, 4B, 5A & 5B*. Singapore: Panpac Education Private Limited.
2. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。
3. 教育局(2011)。《初小解答應用題縱向策略發展》。載於小學校本課程發展發展組：〈「以行求知——教學·學教」經驗分享會〉，網址：<http://www.edb.gov.hk/tc/edu-system/primary-secondary/applicable-to-primary-secondary/sbss/school-based-curriculum-primary/professional-sharing/journey-ss/2011/index.html>

