

## 從已有知識出發，建構分數除法的概念

蕭霞萍女士 (高級學校發展主任)

陳瑞芝老師、高寶婷老師、徐建業老師 (大角嘴天主教小學)

### 已有知識是促進真正理解的關鍵

英國數學教育家 Skemp(1987)認為，數學理解可分為兩類：一為機械性(instrumental)的理解，只知道如何求取答案，例如：長方形的面積是長x寬；一為關係性(relational)的理解，即除了知道如何求答案外，還要知道為什麼要這樣做，例如：為什麼長x寬可以描述長方形面積？

Piaget(1964)認為學生的認知結構能夠不斷擴大是因為「同化」與「調適」。學生藉著舊有的知識基礎來解釋新訊息的刺激，如能適應新訊息的就被保存下來(同化)，反之則被修正(調適)，於是新概念便能內化於學生心中。Skemp(1987)也指出，學生能真正理解學到的知識必是植基於他內在已有的心靈影像(schema)。光是靠記憶來學習新的東西，會令學生學習的負擔愈來愈重，到最後不能負荷，而無法學習更多的新知識，所以應該避免純粹機械性的理解。藉著心靈影像，學生只要調適舊有認知仍未同化的部分，便可大大減少這個負擔。故此，學生在接觸一個新概念時，常會有所疑惑，當解釋的理由觸及到個人舊有知識或是學習經驗時，學生會有「原來如此」、「哦！我明白了」的感受，這才是真正的理解，也就是有了關係性的理解。由此可知，學生豐富的已有知識是促進他們真正理解的關鍵。

### 分數除法的學習問題

《小學數學科教學資料冊(第五輯)》(課程發展處，2006)指出，學生在進行分數除法的運算時常犯下列錯誤：

- 兩分數相除時，只將除號改為乘號，而忽略將除數的分子及分母顛倒。  
例： $\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{5}$ 。
- 兩分數相除時，誤將被除數的分子及分母顛倒。  
例： $\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{8}{3} \times \frac{2}{5}$ 。
- 整數除以分數或分數除以整數時，不懂得如何處理整數部分。  
例： $5 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{8} \div 5 = \frac{3}{8} \times 5$
- 當遇上帶分數時，不懂得先將帶分數化為假分數，然後再進行運算。  
例： $\frac{3}{8} \div 2\frac{4}{5} = \frac{3}{8} \times 2\frac{5}{4}$ 。

這顯示學生並未掌握分數除法的算理概念，即未達至關係性的理解，只靠牢記運算法則來學習，結果錯漏百出。



根據《數學教育學習領域課程指引(小一至小六)》(香港課程發展議會，2000)，分數課程橫跨小三至小五，共分五個單位，簡單臚列如下：

年級	單位	內容
三下	分數(一)	基本概念和分數比較
四下	分數(二)	種類、擴分和約分、同分母分數加減計算
五上	分數(三)	異分母分數加減計算
	分數(四)	乘法
五下	分數(五)	除法

從上表可見，學生在學習分數除法之前已經學習了分數的意義、擴分、約分、分數的加減法和乘法，同時也有了整數除法的經驗，以及均分和包含的概念。

## 一般教材對分數除法的處理

現行教材一般將分數除法的教學程序安排如下：

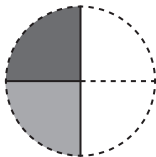
1. 分數除以整數，
2. 整數除以分數，
3. 分數除以分數。

至於教材內容，一般是從類似「分餅」的操作開始。例如： $\frac{1}{2} \div 2$

媽媽把  $\frac{1}{2}$  個薄餅切成兩等份，

每份有薄餅： $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$  (個)

即是  $\frac{1}{2}$  個薄餅的  $\frac{1}{2}$ ： $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  (個)



教材接著指出：2的倒數是 $\frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。然後多舉一些例子，便得出結論，也就是分數除法的運算法則：分數除以整數(0除外)，等於分數乘以整數的倒數。

其實分數除法的難點就是解釋其運算法則，即為什麼「除以一個數等於乘以它的倒數」(下稱「顛倒法」)，但現行的教材沒有清晰地解釋為什麼「除以一個數等於乘以它的倒數」這一難點，而是把重點放在傳授如何顛倒的技巧，並應用該技巧去解題。




## 連結已有知識，探究分數除法的運算法則

大角嘴天主教小學在是次的分享中，除了展示運算上顛倒的技巧外，還嘗試把重點放在幫助學生理解為什麼顛倒上，即除法運算為什麼能轉化為乘運算。以下是該校設計的部分探究活動。

探究一：比較整數除法與分數乘法

教師首先列出三組相類似的分物情境，每組題目均分為(a)、(b)兩部分，讓學生以分組合作的方式進行解題，以下是其中一組題目示例。



a) 把 6 個蘋果平均分為兩份，小芬取去其中一份，小芬可得蘋果多少個？

b) 有 6 個蘋果，小芬取去其中的  $\frac{1}{2}$ ，小芬可得蘋果多少個？

由於學生已有等份的概念，加上整數除法和分數乘法是學生的已有知識，透過分組合作，學生都能夠輕易解題。

a) 小芬可得蘋果： $6 \div 2 = 3$  (個)

b) 小芬可得蘋果： $6 \times \frac{1}{2} = 3$  (個)

解題之後，教師再讓學生比較各組情境，找出(a)和(b)的異同，並記錄他們的發現。通過小組及全班討論，學生不僅能指出兩度算式的第一個數都是相同的，答案亦相同，但是(a)的算式由「除以」變成了(b)的「乘以」，還有「2」變成了「 $\frac{1}{2}$ 」，除此之外，學生還發現了兩組情境的分物方法基本相同，只是文字表達方式不同而已，即是學生理解到：「把一個數平均分成兩份，每份有多少」與「取這個數的 $\frac{1}{2}$ 」意思相同，所以 $6 \div 2 = 6 \times \frac{1}{2}$ 。

為了鞏固及深化學生對分數除以整數的理解，教師提出以下的挑戰題：

有  $\frac{1}{2}$  個西瓜，把它切成 3 等份，每份有西瓜多少個？

每份有西瓜： $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  (個)

學生能準確解題，顯示他們能將整數除以整數的概念遷移到分數除以整數上，也反映學生能達到關係性的理解。



## 探究二：透過「折紙」探究分數除法

整數除以分數和分數除以分數都難以利用等份的概念講解算理，因此在教授這兩部分的概念時，教師需要加入「包含」的意義，並透過「折紙」操作讓學生理解其中的算理。例如： $2 \div \frac{1}{3}$

2 包含多少個 $\frac{1}{3}$ ? <u>    6    </u>	
所以 $2 \div \frac{1}{3} =$ <u>    6    </u>	

學生通過折紙操作，首先把每個「1」平均分成三等份。從上圖可見，「1」裏包含3個  $\frac{1}{3}$ ，所以「2」裏包含6個  $\frac{1}{3}$ 。經過多個例子的嘗試和類推，學生不難發現：

$$2 \div \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1} = 6 \text{ 以至 } 2 \div \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{2} = 3。$$

至於分數除以分數部分，教師也設計了相類似的折紙活動，讓學生在觀察、類推和總結的過程中，推導出分數除法的運算法則，以及其牽涉的算理概念。

教師在總結此課題的教學成效時表示，以往學生學習分數除法時只是一知半解，但求牢記了運算法則，造成了片段、無法連結的知識，也造成了學習的負擔。通過是次的嘗試，教師以學生的舊有知識和學習經驗為學習新概念的基礎，引導學生使用這些已有知識，達到認知結構的新平衡，建構分數除法的新概念。在不增加學生學習的負擔下，讓學生主動統整、連結相關的概念，進行有意義的學習。校內評估結果顯示，學生混淆分數除法運算法則的問題有明顯的改善，同時他們解答相關應用題的能力亦有所提升。

### 參考資料

1. Piaget, J. (1964). *Cognitive Development in Children: Development and Learning. Science Teaching and the Development of Reasoning*. Karplus, R. et al. (Eds.), University of California, Berkeley.
2. Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate.
3. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。
4. 課程發展處數學教育組(2006)。《小學數學科教學資料冊(第五輯)》。香港：政府印務局。

