

從已有知識出發 建構分數除法的概念

大角嘴天主教小學

陳瑞芝主任

高寶婷老師

徐健業老師

小學校本課程發展組

蕭霞萍小姐

2014年3月29日

數學理解可分為兩類

- 機械性理解
 - 只知道如何求取答案
 - 例如：長方形的面積是長 \times 闊
- 關係性理解
 - 除了知道如何求答案外，還知道為什麼要這樣做
 - 例如：為什麼長 \times 闊可以描述長方形面積

Skemp (1987)

「同化」與「調適」

- 光是靠記憶來學習新的東西，會令學生學習的負擔愈來愈重，到最後不能負荷，而無法學習更多的新知識，所以應該避免純粹機械性的理解。
- 學生藉著舊有的知識基礎來解釋新訊息的刺激，如能適應新訊息的就被保存下來(同化)，反之則被修正(調適)，於是新概念便能內化於學生心中。
- 學生豐富的已有知識是促進真正理解的關鍵。

分數除法的學習問題

- 兩分數相除時，只將除號改為乘號，而忽略將除數的分子及分母顛倒。

例：
$$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{5}$$

- 兩分數相除時，誤將被除數的分子及分母顛倒。

例：
$$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{8}{3} \times \frac{2}{5}$$

分數除法的學習問題

- 整數除以分數或分數除以整數時，不懂得如何處理整數部分。

例： $5 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{8} \div 5 = \frac{3}{8} \times 5$

- 當遇上帶分數時，不懂得先將帶分數化為假分數，然後再進行運算。

例： $\frac{3}{8} \div 2\frac{4}{5} = \frac{3}{8} \times 2\frac{5}{4}$

課程發展處 (2006)

學校分享

揀選此課題之原因

- 針對學生學習之需要
- 回應社會對培養學生邏輯思考能力之需求
- 提升學生校內評估及公開考試之能力

2010 – 6M1 答對率：62.5%

$$14. \left| \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} \div 15 = \square \right.$$

2011 – 6M1 答對率：62.7%

$$14. \left| \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} \div 4 = \square \right.$$

- 補坊間教科書之不足

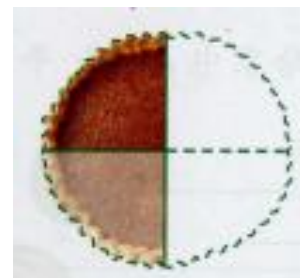
一般教材對分數除法的處理

- 教學程序
 - 分數除以整數
 - 整數除以分數
 - 分數除以分數

一般教材對分數除法的處理

- 例如： $\frac{1}{2} \div 2$

媽媽把 $\frac{1}{2}$ 個薄餅切成兩等份，



每份有薄餅： $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$ (個)

即是 $\frac{1}{2}$ 個薄餅的 $\frac{1}{2}$ ： $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (個)

2的倒數是 $\frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

結論：
分數除以整數
(0除外)，等於
分數乘以整數
的倒數。

一般教材對分數除法的處理

- 其實分數除法的難點就是解釋其運算法則，即為什麼「除以一個數等於乘以它的倒數」。
- 但現行的教材沒有清晰地解釋為什麼「除以一個數等於乘以它的倒數」這一難點，而是把重點放在傳授如何顛倒的技巧，並應用該技巧去解題。

小三至小五的分數課程

年級	單位	內容
三下	分數(一)	基本概念和分數比較
四下	分數(二)	種類、擴分和約分、同分母分數加減計算
五上	分數(三)	異分母分數加減計算
	分數(四)	乘法
五下	分數(五)	除法

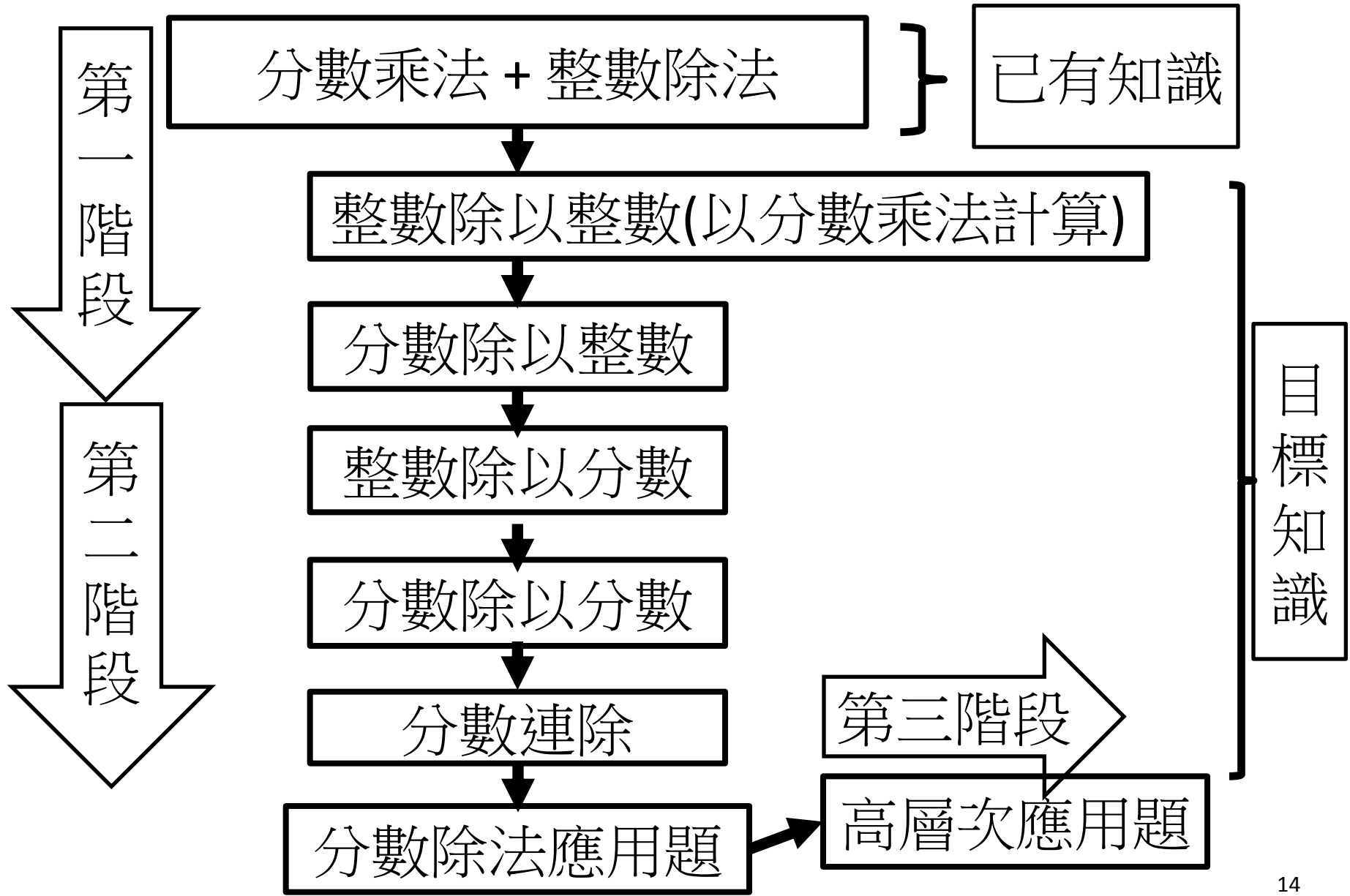
學生的已有知識

- 學生已懂得計算分數乘法
- 學生明白分數的概念

學生的學習困難

- 不認識分數除法的意義，強記計算技巧。
- 有時忘記把除數變倒數
- 有時把被除數變倒數
- 答案未有約至最簡

校本教學設計



探究整數除法和分數乘法的關係

- 連結已有知識，探究整數除法和分數乘法的關係。
- 藉此幫助學生理解為甚麼計算除數時，可以用分數乘法計算，與及為何除數要化成倒數。

引起動機

溫習利用分數乘法

計算從全部求部分數量

- 利用實物磁石數粒，引發同學說出如何利用分數乘法找出其中一部分的數量。
- 例如：有10粒磁石，其中的 $\frac{1}{2}$ 有多少粒？

老師利用實物和同學討論



小結

- 有10粒磁石，其中的 $\frac{1}{2}$ 有多少粒？

學生解釋：

從10粒取其中的 $\frac{1}{2}$ ，即

是將10粒分成2份，取1份，

算式是： $10 \times \frac{1}{2} = 5$ （粒）

二人一組進行思·享·討

利用間線把 16 件物品分組後，在橫線上填寫答案。↵



16 的 $\frac{1}{4}$ 是 _____ ；即 $16 \times \frac{1}{4} =$ _____ ↵



16 的 $\frac{1}{8}$ 是 _____ ；即 _____ ↵

個人活動



反思

- 給學生充足時間思考，從而建構概念。



列式計算下列各題

比較整數除法和 分數乘法

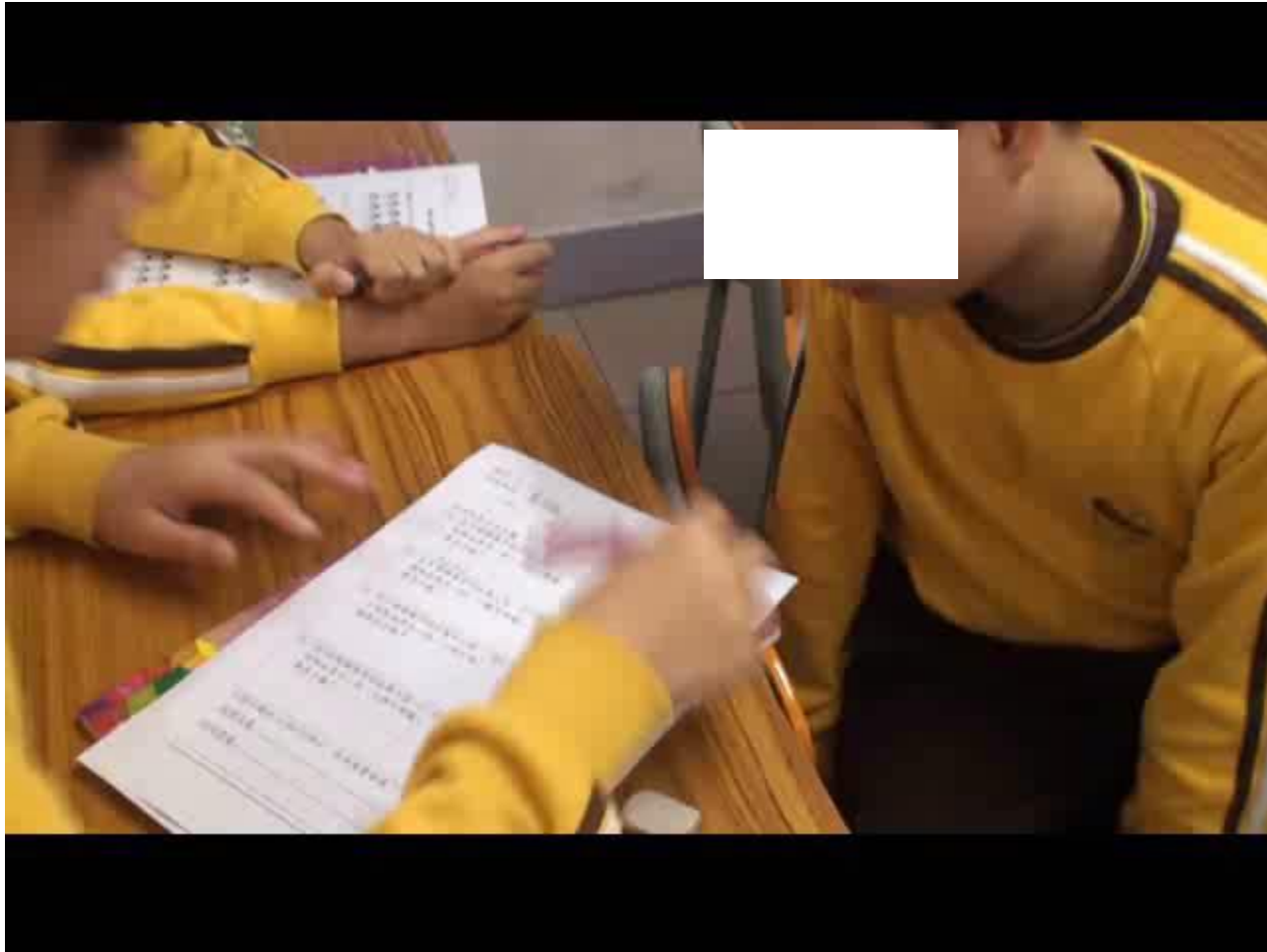
1a) 把 6 個蘋果平均分為兩份，小芬取去其中一份，小芬可得蘋果多少個？	1b) 有 6 個蘋果，小芬取去其中的 $\frac{1}{2}$ ，小芬可得蘋果多少個？
2a) 把 6 個蘋果平均分為三份，小聰取去其中一份，小聰可得蘋果多少個？	2b) 有 6 個蘋果，小聰取去其中的 $\frac{1}{3}$ ，小聰可得蘋果多少個？
3a) 把 6 個蘋果平均分為十二份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？	3b) 有 6 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{12}$ ，小明可得蘋果多少個？
4a) 把 18 個蘋果平均分為六份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？	4b) 有 18 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{6}$ ，小明可得蘋果多少個？

比較各題的(a)和(b)部分，你有甚麼發現呢？

從算式看：

從答案看：

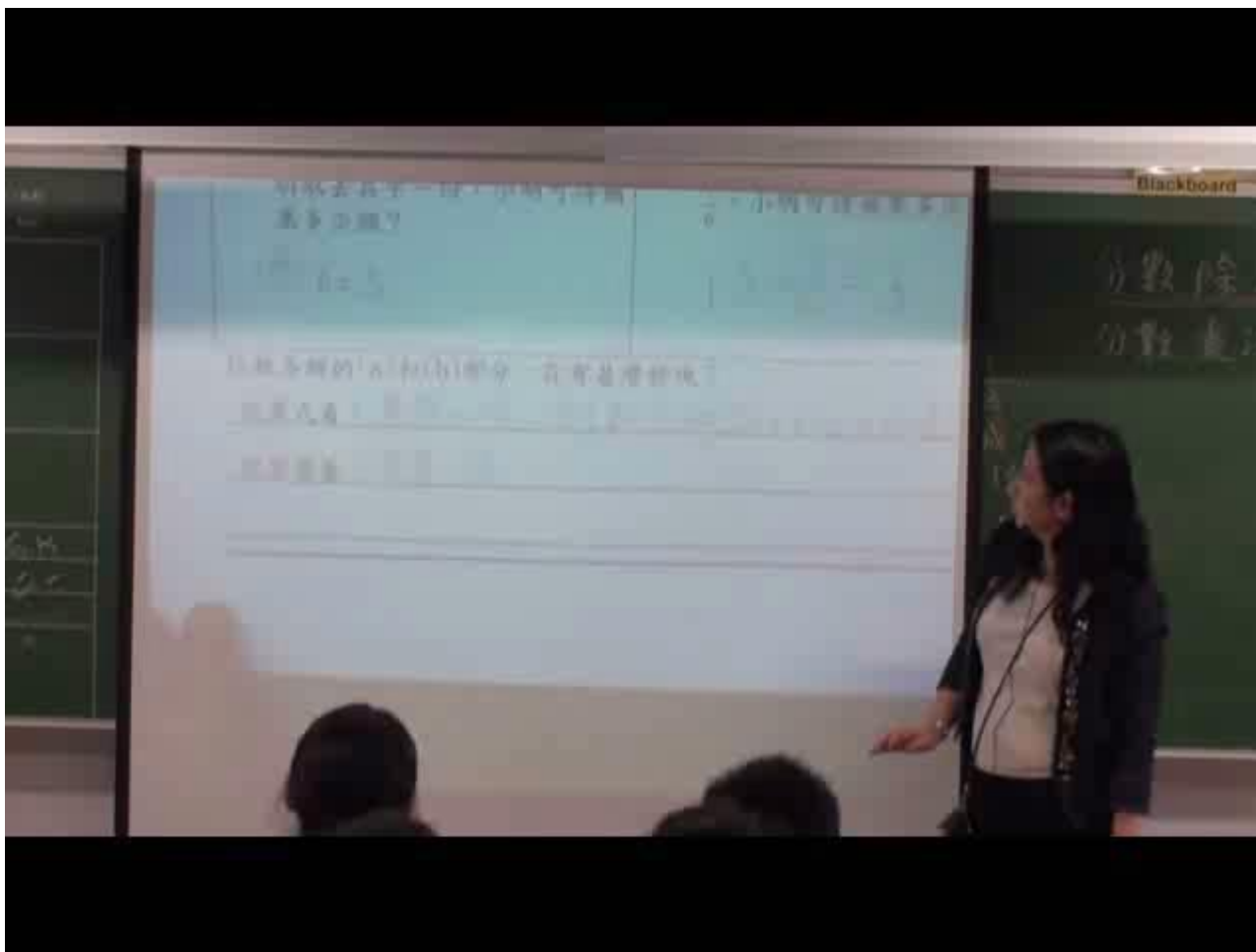
分組討論・合作學習



反思

- 圖像有助學生理解和推論。

分組匯報・發現關係



從算式看：意思一樣，例如 a 和 b ： $6 \div 2 = 6 \times \frac{1}{2}$

從答案看：答案一樣

引導學生類推關係

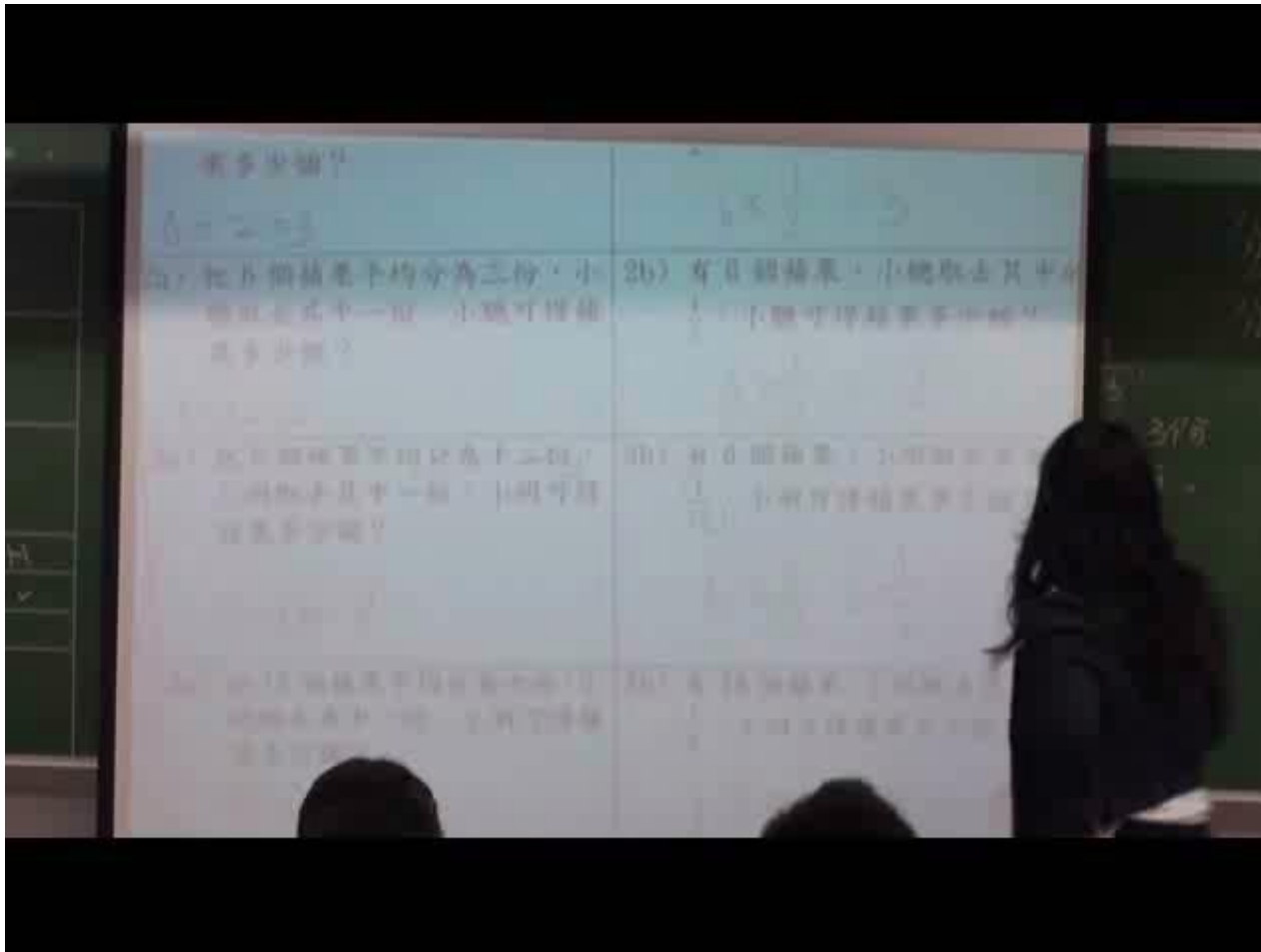
- $6 \div 2 = 6 \times \frac{1}{2}$

- $6 \div 3 = 6 \times \frac{1}{3}$

- $6 \div 4 = 6 \times \frac{1}{4}$

學生推論分數除法的法則

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$



果多少個？

$$6 \div 3 = 2$$

$$6 \times \frac{1}{3} = 2$$

3a) 把 6 個蘋果平均分為十二份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$6 \div 12 = \frac{1}{2}$$

3b) 有 6 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{12}$ ，小明可得蘋果多少個？

$$6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

4a) 把 18 個蘋果平均分為六份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$18 \div 6 = 3$$

4b) 有 18 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{6}$ ，小明可得蘋果多少個？

$$18 \times \frac{1}{6} = 3$$

比較各題的(a)和(b)部分，你有甚麼發現？

從算式看：意思一樣，例如 a 和 b： $6 \div 2 = 6 \times \frac{1}{2}$

從答案看：答案一樣

3a) 把 6 個蘋果平均分為十二份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$6 \div 12 = \frac{1}{2}$$

3b) 有 6 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{12}$ ，小明可得蘋果多少個？

$$6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

4a) 把 18 個蘋果平均分為六份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$18 \div 6 = 3$$

4b) 有 18 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{6}$ ，小明可得蘋果多少個？

$$18 \times \frac{1}{6} = 3$$

比較各題的(a)和(b)部分，你有甚麼發現？

從算式看：算式 A 的算式的除數是 12 的話，分母就是 12。 算式 b 的

從答案看：答案是相同的。

$$6 \div 3 = 2 \text{ (個)}$$

3a) 把 6 個蘋果平均分為十二份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$6 \times \frac{1}{3} = 2 \text{ (個)}$$

3b) 有 6 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{3}$ ，小明可得蘋果多少個？

$$6 \div 12 = 0.5 \text{ (個)}$$

4a) 把 18 個蘋果平均分為六份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \text{ (個)}$$

4b) 有 18 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{6}$ ，小明可得蘋果多少個？

$$18 \div 6 = 3 \text{ (個)}$$

$$18 \times \frac{1}{6} = 3 \text{ (個)}$$

比較各題的(a)和(b)部分，你有甚麼發現？

從算式看：a 是除整數，b 是乘分數，a 和 b 都是在蘋果中取出一樣的数量。

從答案看：a 和 b 的答案是一樣的。

3a) 把 6 個蘋果平均分為十二份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$6 \div 12 = \frac{1}{2} \text{個}$$

3b) 有 6 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{12}$ ，小明可得蘋果多少個？

$$6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

4a) 把 18 個蘋果平均分為六份，小明取去其中一份，小明可得蘋果多少個？

$$18 \div 6 = 3 \text{個}$$

4b) 有 18 個蘋果，小明取去其中的 $\frac{1}{6}$ ，小明可得蘋果多少個？

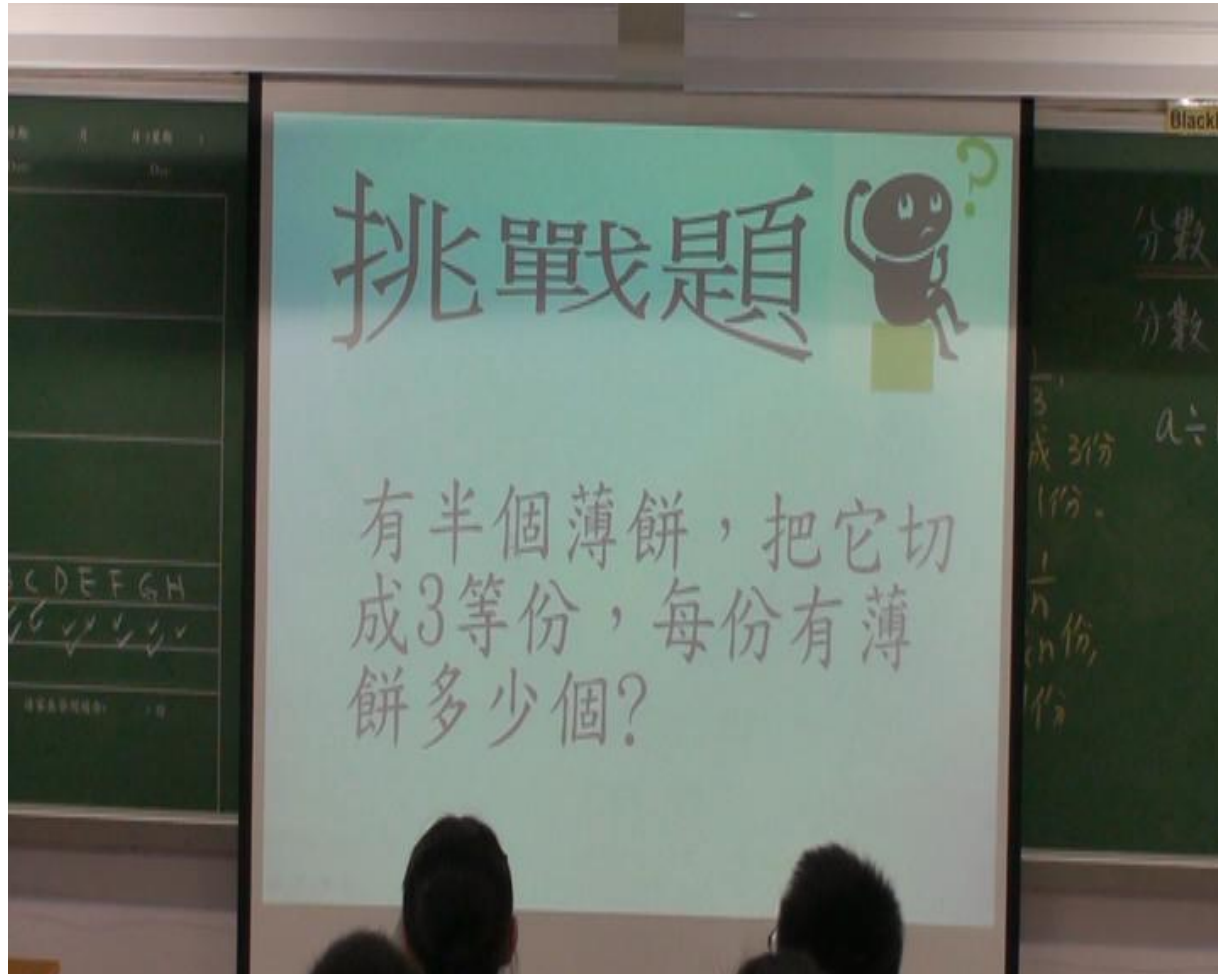
$$18 \times \frac{1}{6} = 3$$


比較各題的(a)和(b)部分，你有甚麼發現？

從算式看：意思一樣，例如(2a)平均分為份，取去其中一份和取

從答案看：答案一樣 去其中的份

鞏固和深化學生的理解 計算分數除以整數

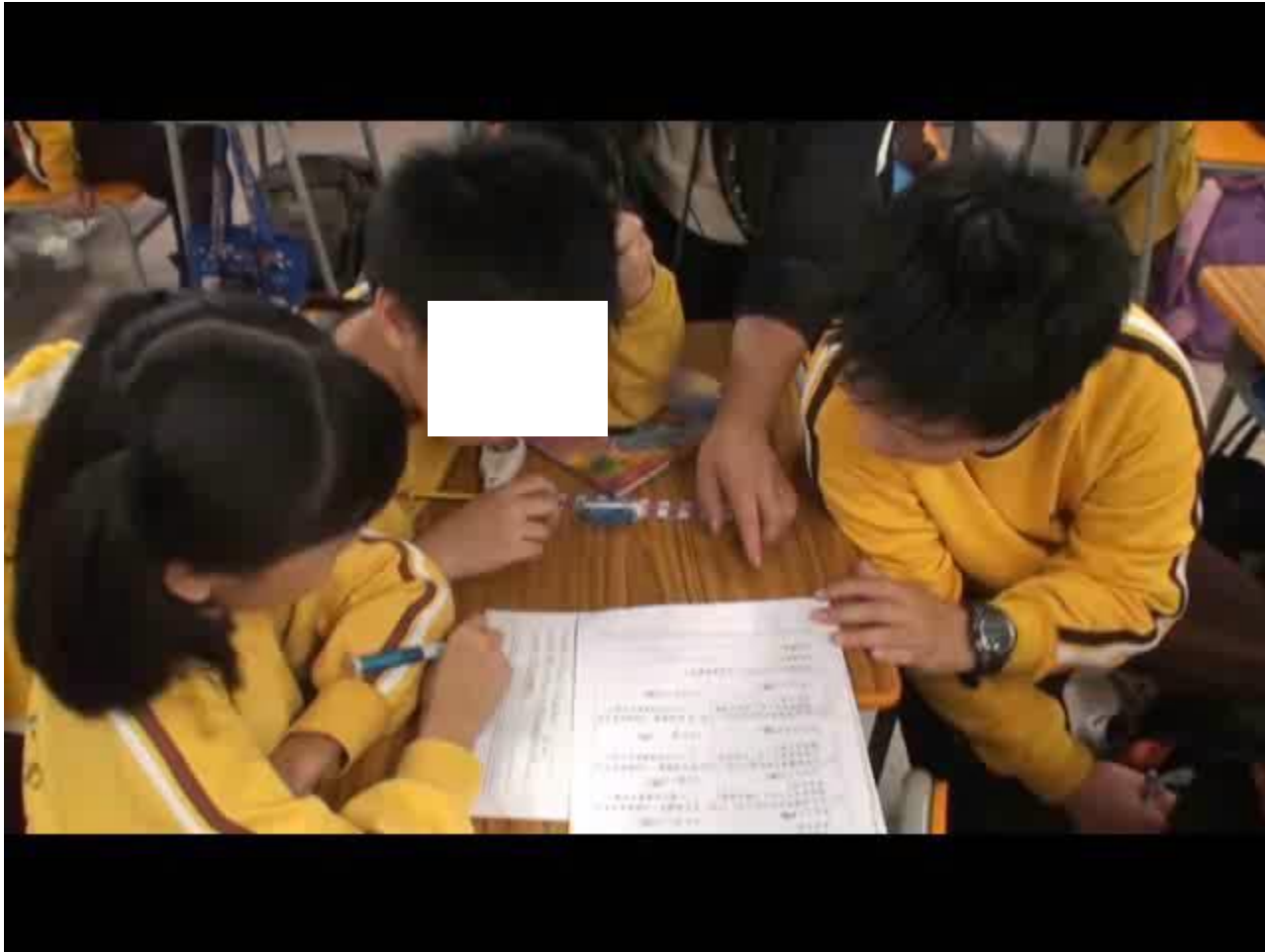



挑戰題 

有半個薄餅，把它切成3等份，每份有薄餅多少個？

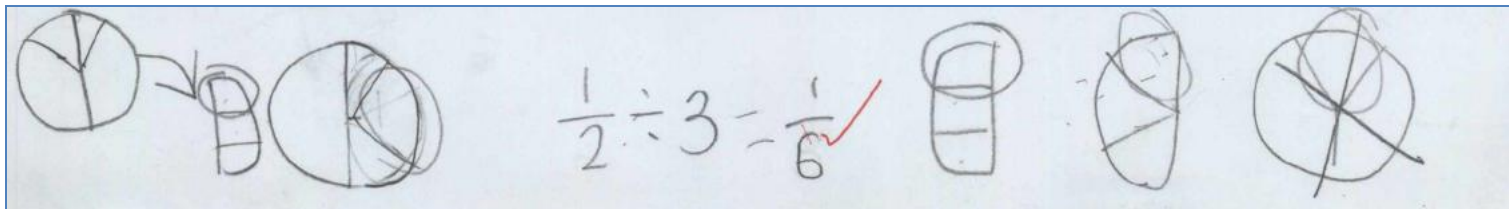
Left chalkboard: CDEFGH
Right chalkboard: 分數
分數
 $a \div b$
成3份
1份
 $\frac{1}{n}$
份
份

合作學習 · 準確解題




$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \checkmark$$

異質分組・互相學習



建構法則・加以應用

$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ (個)} \quad \checkmark$$



$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \checkmark \quad \checkmark$$

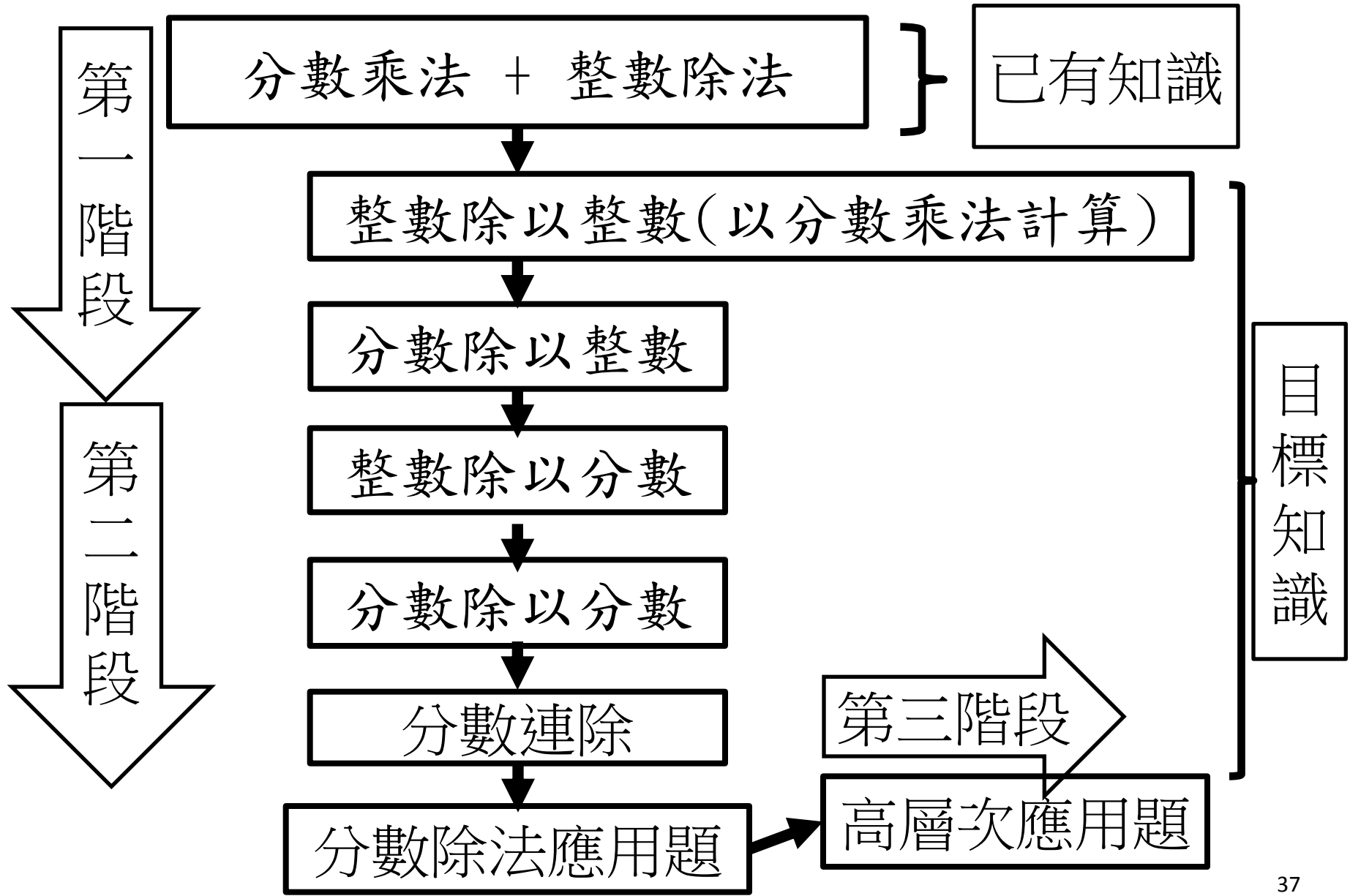


$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ 原: } \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

老師的反思

- 一點舊，一點新，循序漸進，由淺入深。
- 給學生充足時間思考，從而建構概念。
- 實物和圖像有助學生理解和推論。

校本教學設計

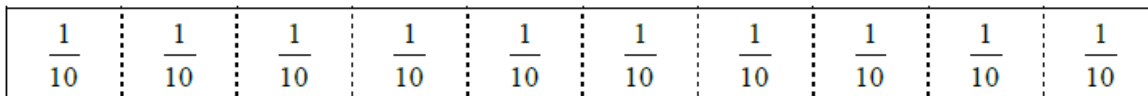
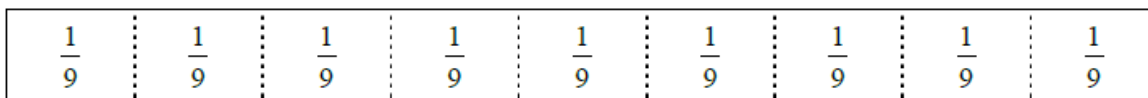
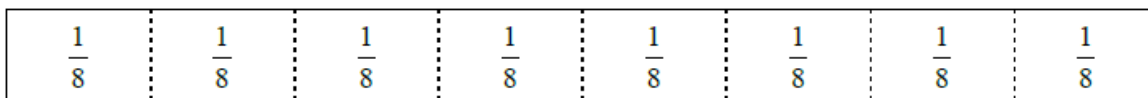
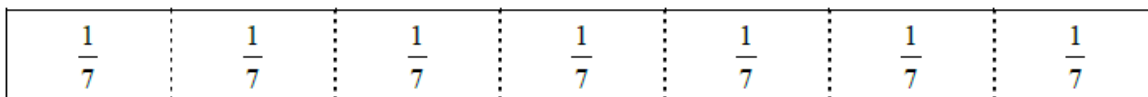
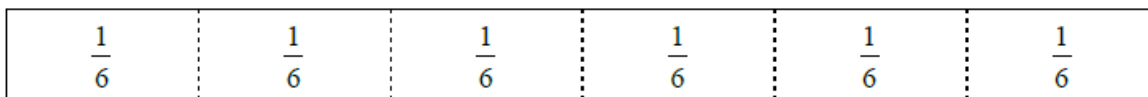
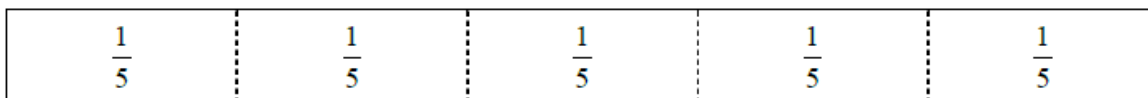
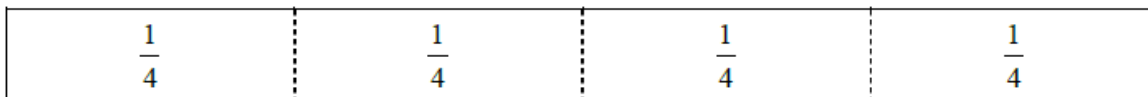
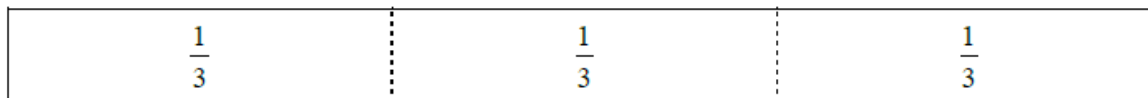
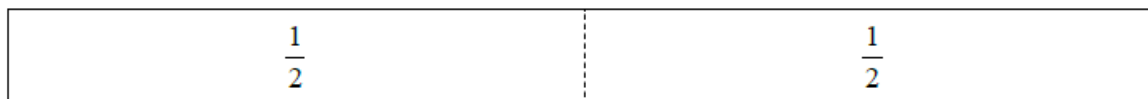
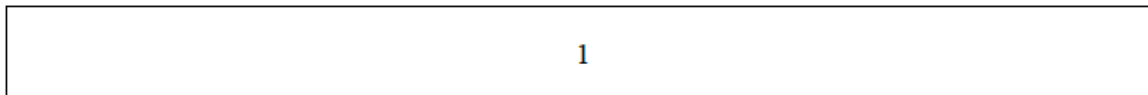


整數除以分數

學習難點及處理方法

- 相比日常生活中常見的整數分物，學生在現實生活中較少接觸以分數分物的包含性除法（例如： $2 \div \frac{1}{3}$ ），所以較難理解其中的算理，亦不懂如何計算。
- 利單位分數表幫助學生理解。

單位分數表

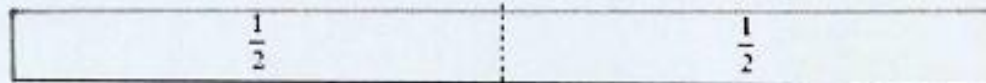
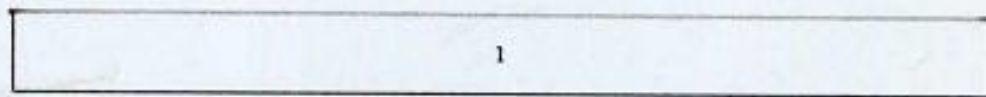


探究活動 - 利用單位分數表解題

- 透過摺疊單位分數表，將單位分數和「1」作出對比，學生輕易得知整數除以分數的答案。

1 包含多少個 $\frac{1}{2}$? 2

所以 $1 \div \frac{1}{2} = \underline{2}$



1) 1 包含多少個 $\frac{1}{2}$? _____



所以 $1 \div \frac{1}{2} =$ _____

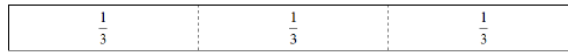


2) 1 包含 _____ 個 $\frac{1}{3}$, 所以 $1 \div \frac{1}{3} =$ _____ 。

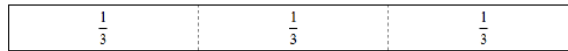
3) 1 包含 _____ 個 $\frac{1}{4}$, 所以 $1 \div \frac{1}{4} =$ _____ 。

4) 1 包含 _____ 個 $\frac{1}{5}$, 所以 $1 \div \frac{1}{5} =$ _____ 。

5) 2 包含多少個 $\frac{1}{3}$? _____



所以 $2 \div \frac{1}{3} =$ _____



6) 3 包含多少 $\frac{1}{4}$ 個? _____

所以 $3 \div \frac{1}{4} =$ _____

7) 4 包含多少 $\frac{1}{2}$ 個? _____

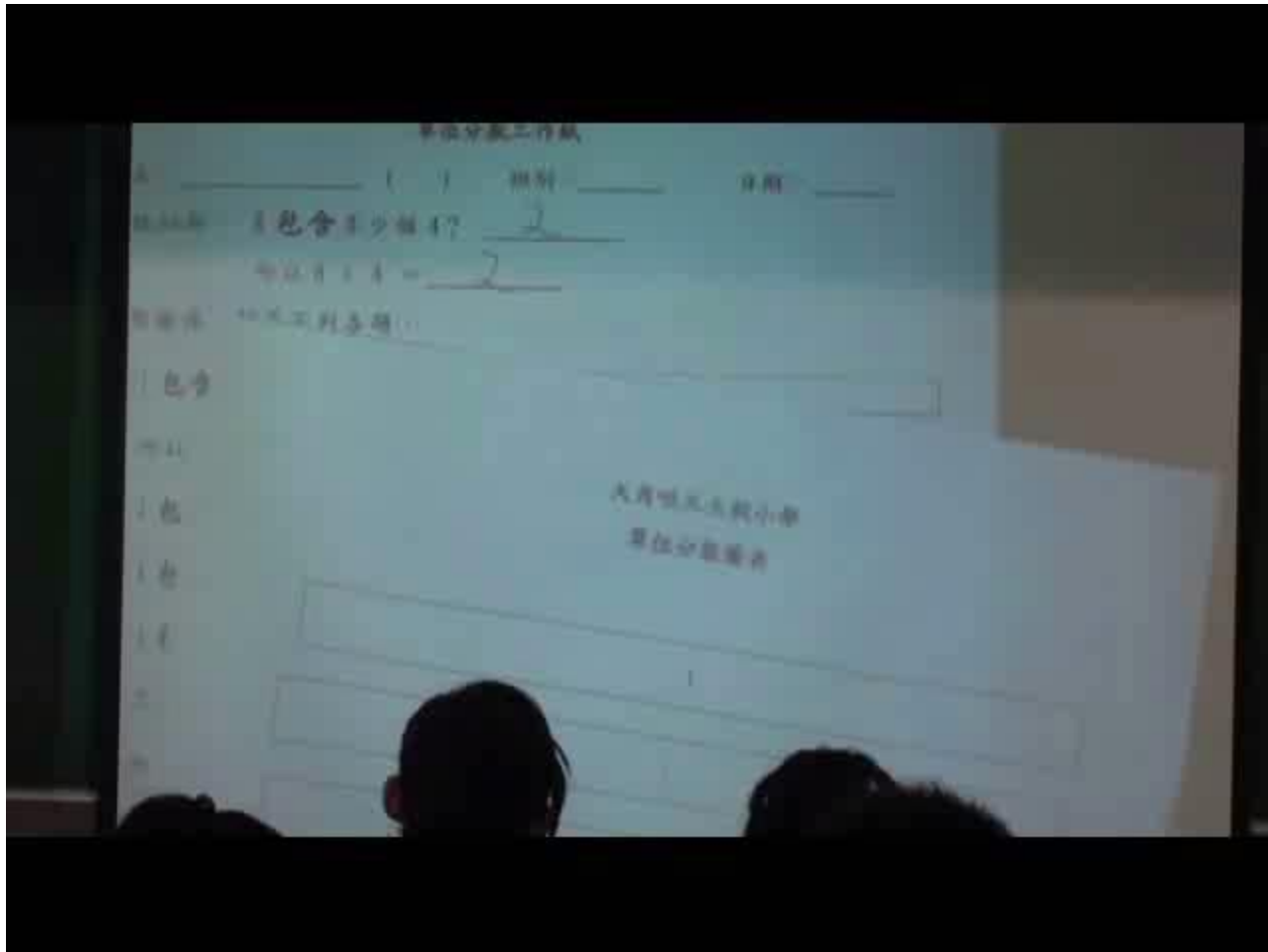
所以 $4 \div \frac{1}{2} =$ _____

8) 挑戰題：

(a) $52 \div \frac{1}{7} =$

(b) $2 \div \frac{2}{3} =$

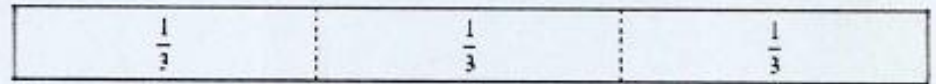
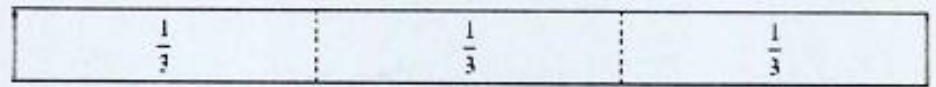
利用單位分數表解題



學生透過單位分數表解構 整數除以分數的概念

5) 2 包含多少個 $\frac{1}{3}$? 6 ✓

所以 $2 \div \frac{1}{3} = \underline{6}$ ✓



6) 3 包含多少個 $\frac{1}{4}$? 12 ✓

所以 $3 \div \frac{1}{4} = \underline{12}$ ✓

7) 4 包含多少個 $\frac{1}{2}$? 8 ✓

所以 $4 \div \frac{1}{2} = \underline{8}$ ✓

思考・討論

- 當學生給出整數除以分數的答案後，老師再請學生比較各題的算式和答案部分，思考有甚麼共通之處。

小組討論 - 算式及答案的關係



匯報及驗證



學生的發現

- 一般而言，學生都能粗略說出整數除以分數的計算方法。

比較 5, 6 和 7 題的算式和答案部分，你有甚麼發現？

整數 \times 分母 = 答案

如： $2 \div \frac{1}{3} = 6$

↑
答案



學生的發現

即是除數倒轉, 如: $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1} = \frac{6}{1} = 6$
被除數乘

$$2 \div \frac{1}{3} = 6$$

$2 \times 3 = 6$

整數乘於分母等於答案/積。
整數 \times 分母 = 答案/積。

$$= 2 \times \frac{3}{1} = 6$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\frac{1}{3}$

知識的遷移

- 堂課顯示出學生有能力去解決整數除以分數的問題。

$$24 \div \frac{5}{6}$$



分數除以分數

探究活動 - 繼續利用單位分數表解題

- 透過摺疊單位分數表，將相關分數互作對比，學生輕易得知分數除以分數的答案，再從中類推分數除以分數的運算法則。

$\frac{1}{2}$ 包含 2 個 $\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \underline{2}$ 。

$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

溫故知新：

$\frac{2}{4}$ 包含多少個 $\frac{1}{4}$? 2 個

所以 $\frac{2}{4} \div \frac{1}{4} =$ 2



觀察上頁的圖像，解答下列各題。

1) $\frac{1}{2}$ 包含 2 個 $\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} =$ 2。

2) $\frac{1}{3}$ 包含 3 個 $\frac{1}{9}$ ，所以 $\frac{1}{3} \div \frac{1}{9} =$ 3。

3) $\frac{1}{2}$ 包含 4 個 $\frac{1}{8}$ ，所以 $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} =$ 4。

4a) $\frac{4}{5}$ 包含 2 個 $\frac{2}{5}$ ，所以 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{5} =$ 2。

4b) $\frac{4}{5} \times \frac{5}{2} =$ 2

5a) $\frac{6}{7}$ 包含 2 個 $\frac{3}{7}$ ，所以 $\frac{6}{7} \div \frac{3}{7} =$ 2。

5b) $\frac{6}{7} \times \frac{7}{3} =$ 2

6a) $\frac{8}{9}$ 包含 4 個 $\frac{2}{9}$ ，所以 $\frac{8}{9} \div \frac{2}{9} =$ 4。

6b) $\frac{8}{9} \times \frac{9}{2} =$ 4

學生的發現

7) 比較第 4 至第 6 題的 (a) 和 (b) 部分，你有甚麼發現？

我發現 (a) 和 (b) 的答案都是一樣。 $\frac{B}{A} \div \frac{D}{C} = \frac{B}{A} \times \frac{C}{D}$ 。

4a/b: $\frac{4}{5} \div \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} = 2$ (答案相同)

計算方法：被除數不變，除數分母和分子倒轉，化成乘數計算。

我發現 1. 比較方便 2. 比較快 3. 答案一樣 4. 實式如果說包含的話，就是說其中一份的分數是含有多少，例如 $\frac{4}{5}$ 中含有多少個 $\frac{2}{5}$ ，所以包含是和分數除法是有很大的關係的 5. 因此推測 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$ 。例 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2}$ 。

從評估表現印證學習成效

8) $8 \div \frac{2}{3} = ?$

9) $25 \div 2\frac{1}{2} = ?$

10) $\frac{5}{12} \div \frac{1}{4} \div \frac{5}{6} = ?$

8)

12

9)

10

10)

2

式題答對率都在八成五以上

39) 單車行車 3 小時，共走了 $17\frac{2}{5}$ 公里，平均每小時走了多少公里？

平均每小時走了：

$$\begin{aligned} & 17\frac{2}{5} \div 3 \\ &= \frac{87}{5} \div 3 \\ &= \frac{87}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{29}{5} = 5\frac{4}{5} \text{ (公里)} \end{aligned}$$

即使是較難的文字題，答對率亦甚佳。

39) 單車行車 3 小時，共走了 $17\frac{2}{5}$ 公里，平均每小時走了多少公里？

平均每小時走了：

平均每小時走了：

$$\begin{aligned} 17\frac{2}{5} \div 3 \\ = \frac{87}{5} \div 3 \\ = \frac{87}{5} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{29}{5} \\ = \underline{\underline{3\frac{4}{5} \text{ (公里)}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17\frac{2}{5} \div 3 \\ = \frac{87}{5} \div 3 \\ = \frac{87}{5} \times \frac{1}{3} \\ = \frac{29}{5} \\ = \underline{\underline{5\frac{4}{5} \text{ (公里)}}} \end{aligned}$$

學生錯誤主要是運算失準或大意，
而不是混淆概念。

答問時間

* 請填寫問卷 *