

排水法 — 實物操作？解難活動？科學實驗？

周偉志先生 (高級學校發展主任)

文美玉老師 (香海正覺蓮社佛教正慧小學)

雖然老師普遍認為實物操作有助學生建立抽象的數學概念，但在實踐教學時則由於種種原因而不採取這教學模式，當中問題可能包括教具不足、擔心學生秩序問題及課時不足等，此情況在小六的排水法教學中也會出現。此外，有老師提出排水法的原理簡單，學生很易明白，對提升學生的解難能力作用不大，也有老師表示排水法的活動有點像科學實驗，不如直接利用結果進行解題比較實際。學生在進行排水法的活動時，除了能建立數學概念外，也能提升解難能力嗎？如果排水法真的像科學實驗，在數學的學習上也有意義嗎？這些都是我們值得思考的問題。我們先從分析排水法在課程中的內容開始，繼而了解香海正覺蓮社佛教正慧小學在處理此課題上的實踐經驗，希望大家對此課題能作出多一點思考。

課程內容分析

甚麼是排水法

排水法是一種計算或量度立體體積的方法，一般用作量度不規則立體的體積，由於不規則立體不能被分割成細小的正方體或長方體，故難以運用數學公式計算。排水法的原理是當立體放入注滿水的容器中，水受立體的擠壓便會溢出容器，由於溢出的水的體積與立體的體積相同，故此只要量度水的體積便知道立體的體積；另一方法是當立體放入容器後，容器內的水能完全淹沒立體，只要計算或量度放入立體後升高了的水位所佔水的體積，便能知道立體的體積。因此排水法可說是從一物理現象中間接量度立體體積的方法。

排水法在體積中的意義

排水法在數學課程指引(小一至小六)(香港課程發展議會, 2000)中屬體積單元的課題，根據Hart (1981)對體積的描述，體積有三種意義，包括一個容器所能容納的量、基本體積單位的數量，以及當物體放入液體後所被取代的量。而Potari和Spiliotopoulou(1996)亦提到皮亞傑對體積下了二個解釋，其一是內部體積(interior volume)，所指的是物體邊界內的空間，即物體實際可容納的空間；其二是物體所佔的體積(occupied volume)，即其他物質(例如：水)包圍著一個物體的空間，例如當一物體放入水後所排出的體積。因此，學習排水法不單是學會一個量度或計算體積的方法，也豐富了學生認識體積的不同概念。

體積的學習重點

小學數學課程指引(香港課程發展議會, 2000)中有關體積的學習重點包括：(1)認識體積的概念；(2)直觀比較物體體積的大小；(3)認識公認單位「立方厘米」；(4)以「立方厘米」為單位，量度及比較物



體的體積；(5) 認識使用比「立方厘米」較大的量度單位的需要；(6) 認識「立方米」；(7) 認識及應用正方體和長方體體積的公式；(8) 認識容量與體積的關係；(9) 用排水法找出不規則立體的體積。這些學習重點包含了Hart(1981)及Potari和Spiliotopoulou(1996)所提及體積的不同意義，學生從中可全面地理解體積的概念。

體積的學習策略

課程的學習重點不但提及體積的學習內容，同時也展示出學生建立體積概念的進程。和其他度量的課題相似(例如：長度、周界及面積)，學生學習體積時需由直觀、選擇自訂單位到運用標準單位，接著是建立及運用公式解決問題，這符合Couvillon和Tait(1982)指出學生建立度量概念三個層次的發展階段，即覺知(perceptual)、認識(conceptual)及應用(algorithmic and application)。學習過程中，學生需透過不同的實物操作活動，由具體到抽象，循序漸進地對體積由較粗疏的理解發展至較嚴謹的概念。此外，有一點較為被忽略的，就是在學習過程中，由於學生需不斷比較不同立體體積的大小，故學習活動的設計應有很強的解難意味，而不單只是一般的實物操作。至於運用排水法找出不規則立體的體積，可算是已超越了學生之前對體積的理解，學生已不能直接套用公式計算答案，亦不能透過堆疊或分割等方法解決問題，而是透過理解一物理現象，用間接的方法作出測量及計算，這種處理概念及解題的方法，在度量的其他課題中甚為少見。

反思排水法的教學理念

在上文中討論到體積的教學策略強調實物操作與解難，而排水法又結合了物理與數學的理解，那麼我們如何處理排水法的教學呢？排水法是從實作中找出答案的方法，故教學時讓學生經驗實物操作甚為重要，學生在學習數學時常透過實物操作建立概念，但這次活動的性質不同，排水法的操作活動目的在解決問題，即找出不同立體的體積，故應讓學生從解難中進行操作活動，即先讓學生了解需要解決的問題，而題目也應具挑戰性或能引起學生的疑惑，讓學生透過操作活動思考及解決相關問題。另一方面，排水法乃透過一物理現象解決問題，故進行的活動也有科學實驗的性質，當中應讓學生從活動中進行探究及驗證，並讓學生解釋結論，使數學與科學有所連繫。其實不同的研究也指出學生在科學學習的表現與他們的數學基礎有著密切關係(Czerniak, Weber, Sandmann, & Ahern, 1999)，故讓學生把這兩學科的知識互相連繫乃一值得探討的課題。

學校的實踐經驗

佛教正慧小學的老師一向重視讓學生從實物操作中建立數學概念，在思考排水法的教學時，認為當中可涉及很豐富的解難元素，故每活動均以解難題目開始，藉此提高學生的學習動機，學生透過操作活動解決問題，從而提升解難能力。他們亦思考到有別於一般實物操作活動，排水法涉及物理現象，學習活動也可視為科學實驗，故期望學生能從實驗結果中解釋當中原理，並培養出樂於探索及求真的學習精神。整個教學安排包含多個學習活動，雖然每個學習活動的目標均不同，但當中的重點及技巧則互有關連，故老師在每一課堂後均要求學生進行小組自評，讓學生反思自己的表現，並提出改善建議，期望學生更能了解及關注自己的學習過程，並不斷提升自己的學習表現，正如Earl(2003)提及，



如能持續讓學生透過自評反思自己的學習，他們便能靈活地運用自己的知識理解事物，並從了解自己的不足中，主動尋求不同方法提升學習成效。在下列活動中，讓我們具體地從老師設計的不同學習活動中，了解當中的教學理念。

哪個水箱的容量最大？

老師準備四款不同大小的長方體水箱，學生需估計四款水箱中，最大一款的容量，並進行驗證。比較大小乃度量中最常見的問題，學生需運用容量概念進行比較。在驗證時，學生先量度水箱內的長、闊及高，並計算可容納多少體積的水。為讓學生了解容量及體積的關係，為排水法建立初步的理論基礎，學生需把水箱注滿水，以量杯量度水的體積，並比較之前的計算結果，觀察有甚麼發現，從討論中了解容量與體積的關係。

哪個水箱的水位最高？

這次學生需估計在那四個不同款式的水箱中注滿相等體積的水，看看那個水箱的水位會較高。學生需把水注入水箱，並記錄水深的高度，全班同學比較及討論所得結果，讓學生觀察水深、水箱的底面積及水的體積的關係，學生從實驗、記錄及觀察數據中進行推理，並嘗試解釋當中關係。學生了解到當中關係後，對解答把物體放進水中，求水位升高多少等問題，加深了理解，不需單靠背誦公式解答題目。亦由於學生是從實驗中得出當中結論，這對自己有說服力，而不是不求甚解。

升高了的水位高度所佔的體積就是立體的體積嗎？

當把立體放進水中，由於立體佔了水的部份空間，故水被擠壓，容器中的水位因而升高，升高了的水位所佔水的體積就相等於立體的體積，這就是「排水法」，這個理所當然的推論有否驗證的可能呢？老師在進行操作活動時，很多時介紹了排水法的理論後，就讓學生運用排水法找出不規則立體的體積，而沒有先讓學生驗證排水法的可靠性。為了讓學生信服當中理論，老師讓學生先用排水法找出長方體的體積，由於學生已懂得運用公式找出長方體的體積，故在計算後可把結果比較以排水法找出的體積有甚麼關係，學生在比對不同組別的結果後可嘗試觀察及解釋當中關係，並討論不同組別出現誤差的原因。從這活動中，學生學會了小心求真的探索精神。

你能用排水法找出哪件物體的體積最大？哪件最小呢？

這次學生需先估計四件物件中，哪一件的體積最大，哪一件最小，然後以排水法找出所有物件的體積，把結果記錄，從而得出結論。這樣做法有別於只提供一件或幾件物件給學生進行量度，因學生需同時量度所有物件才能得出結論，故不但增加了學生運用排水法的機會，也讓學生有目的地進行量度，提高了學習動機。

用排水法能找出一粒波子的體積嗎？

這也是其中一種常見的題目，在題目中學生會先計算多粒波子的體積，然後運用除法找出一粒的體積。在操作上，本可提供多粒波子讓學生進行實驗，但老師對學生有更高的期望，老師希望學生知道



用不同數量的波子對結果有甚麼影響，理論上愈多波子所得的結果應愈準確，但步驟則愈繁複。老師希望透過討論讓學生決定放置波子的數量，並說出較多好還是較少好，如何取得平衡，目的在開拓學生的思考空間，讓學生對排水法有多一點思考。

如放入的物體不能完全被水淹沒，也能運用排水法找出體積嗎？

這是一道較深的解難題目，相信學生會認為不可以，因完全淹沒物體是排水法的先決條件，但原來只要運用簡單的運算也可從升高的部份水位中找出整件立體的體積，老師先讓學生進行討論，讓學生說出假設，並以實驗驗證結果，目的在使學生不要被已有的框框限制，要突破界限，做到大膽假設，小心求證。在得出實驗結果後，老師讓學生嘗試解釋當中現象，期望學生對排水法有進一步的理解。老師在探討這解難題的過程中，認為可讓學生先理解排水法的幾種情況，第一種情況較為簡單，就是當立體未放入水前，水位已高於立體；第二種情況較被忽略，就是當立體未放入水前，水位是低於立體的，但當立體放入水後，水位則能蓋過立體；第三種情況和第二種相似，就是當立體放入水後，水位的高度和立體的高度相等。事實上在這三種情況下排水法均能成立，而第三種情況的成立則能推論出解難題目的解決方法。

運用排水法是否能找出所有立體的體積呢？如何找出一個乒乓球的體積呢？

雖然這不是一道數學題，但可作為擴闊學生對排水法的理解，從物理現象角度看，排水法有其限制或假設，即物體必須能沉入水中，一些能溶於水或能吸水的物質也不能以排水法找出體積，亦由於這課題的活動安排著重以實驗為基礎，故讓學生討論其限制，能使他們更完整地理解這課題。至於如何求得一個乒乓球的體積，能讓學生有發揮創意的機會，由於乒乓球是浮的，故不能直接以排水法找出體積，但學生能否結合對排水法及容量等概念，再加一點想像力，從而找出方法呢？這些問題能引發學生的好奇心，使他們能進一步思考這主題，並作進一步探索。

總結教學經驗

整體而言，我們構思這個單元的教學時，著重每個活動均讓學生從解難中學習，先作猜想及估計，並以實驗作理解的基礎，老師綜合全班在實驗中的數據後，讓學生觀察及歸納結果，並嘗試解釋當中現象，老師亦鼓勵學生互相討論，尤其當實驗出現預期之外的結果時，更是學生共同思考的好機會。是次教學安排有機地結合了實物操作、解難活動及科學實驗的學習元素，擴闊了排水法在數學學習中的意義。

在是次分享會中，老師期望透過課堂片段及學生習作顯示學生的學習過程，讓參與老師了解學生在各活動中的表現，包括他們如何進行實驗，如何理解數據及如何解釋現象。此外，在教學過程中，我們發覺學生時有意想不到的表現，這些表現能啟發我們對學生學習的理解，從而反思自己的教學。老師也期望透過這次研討會和大家分享他們探討這課題時的經歷及所思所想，包括他們如何從分析學生難點、教學重點到設計教學的經歷，並希望能和與會老師有所交流。



參考資料

1. Couvillon, L. A., & Tait, P. E. (1982). A sensory experience model for teaching measurement. *Visual Impairment and Blindness, 57*, 262-268.
2. Czerniak, C. M., Weber, W. B., Sandmann, A., & Ahern, J. (1999). A literature review of science and mathematics integration. *School Science and Mathematics, 99*(8), 421-430.
3. Earl, L. (2003). *Assessment as Learning: Using Classroom Assessment to Maximise Student Learning*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
4. Hart, K. (1981). *Children's Understanding of Mathematics*. London: John Murray.
5. Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (1996). Children's approach to the concept of volume. *Science Education, 80*(3), 341-360.
6. 香港課程發展議會(2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。

