

探究分數的縱向課程

羅漢輝先生 (高級學校發展主任)



陸嘉明老師、周子傑老師、吳小娟老師 (大角嘴天主教小學(海帆道))

分數學習的重要性

根據數學課程指引(小一至小六)(香港課程發展議會, 2000), 學生在「數」範疇的學習, 首先需要學習整數(Integer)的表達和運算, 包括自然數、數數、整數的四則運算等。小三開始接觸分數, 當中的學習重點包括分數的概念、表達、運算和應用。分數的學習對學生理解數學系統(Number System)是非常重要的, 是幫助他們認識有理數(Rational Number)的基礎知識。

分數和許多課題有密切的聯繫, 例如在「數」範疇中的除法、比例等, 以及在「度量」範疇中的長度、容量、重量和時間等課題。因此, 學生對分數的掌握, 均影響他們在相關課題上的學習。另外, 學生的日常生活經驗亦離不開分數的應用, 例如, 將生果切為兩半, 一半就是二分之一。

在小學數學課程中, 分數概念有不同的表達形式, 包括:

分數概念	表達形式
(1) 整體與其部分的關係	$\frac{3}{4}$ 理解為 1 個圖形平均分成 4 等份, 着色部分佔整個圖形的 $\frac{3}{4}$ 。 
(2) 一組物件的部分	黑色棋子佔全部棋子的 $\frac{3}{4}$ 
(3) 除法: 兩個整數的商	$\frac{6}{3}$ 等於 2
(4) 倍數	12 的 $\frac{3}{4}$ 倍等於 9

為何探討分數課題

在分數的學習過程中, 大角嘴天主教小學(海帆道)的教師發現學生較能掌握分數的基礎概念, 例如: 分數作為整體與其部分的關係, 惟對於分數的其他表達, 例如: 分數作為除法的商和倍數等概念, 則掌握尚欠透徹。為此, 教師期望透過共同備課, 制訂有效的學習策略, 幫助學生建構分數概念, 以及掌握分數的運算技巧和運用。

為提升學生對分數的理解, 教學設計著重實作活動的運用和數學語言的發展。實作活動能加強學生對分數的「數字感」; 數學語言除了幫助學生建構和表達數學概念外, 並能發展學生的數學思維。因此, 我們希望理順學習分數的方法, 使學生能夠有系統地掌握分數的概念和運算技巧, 從而提升學習效能。



備課會制定改善策略


(1) 運用「前測和後測」，評估分數概念的掌握

根據研究顯示，學生進入課堂學習前，已經對數學知識有先入為主的觀念 (Preconceptions)。這些先入為主的觀念，不純是從教科書而來，而是他們從生活中所經驗的，而當中的知識未必與數學知識一致。為提升教學效能，教師需要掌握學生的已有知識 (Prior Knowledge)，藉以作為橋樑引入需要教授的數學知識，並釐清學生的謬誤，進而提升他們對學科知識的掌握 (Bransford, Brown, & Cocking, 2000; Suzanne & Bransford, 2005)。在備課會中，教師從學生的角度制訂教學策略，先考慮他們的已有知識，例如：學生的「數數」和除法的運算如何影響分數的學習。因此，教師採用「前測和後測」，以評估學生在分數上的難點。透過前測，教師可準確地掌握學生對分數概念的理解，例如：


(i) 我們想掌握學生如何理解 $\frac{3}{4}$ 的意思？前測設置以下題目：

以下哪些情況表示 $\frac{3}{4}$ ？在 內加 \checkmark 。

情況一：一個圓形等分成4份，其中3份填上顏色。



情況二：一組棋子，黑色棋子佔全部棋子的幾分之幾？




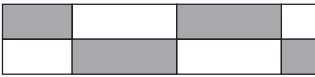
情況三： $3 \div 4$

前測結果：大部分學生能指出 $\frac{3}{4}$ 可以表示情況一和情況二，只有少部分能指出這數值亦適用於情況三。這顯示學生已經掌握分數作為整體與其部分的關係，以及作為一組物件的部分的意義，惟將分數聯繫除法的意義，卻未有充份掌握。

(ii) 為評估學生對「等分」的觀念，前測設置以下題目：

在以下圖形中，陰影部份佔了圖形的幾分之幾？在 () 內填上適當的答案。

a)  ()

b)  ()

前測結果：大部分學生未能準確表達陰影部分的數值。這顯示學生對「等分」概念模糊。



透過前測的結果，教師能夠清晰掌握學生對分數的理解和學習難點，例如：分數作為除法的表達、作為部分與一組物件的關係，以及等分的意義。基於這些學習數據，教師重整教學內容和調整教學策略，針對學習難點。在完成分數教學後，我們透過後測，發現學生在前測中未能掌握的分數概念和表達，已見明顯進步。

「前測和後測」為教師提供有效的評估數據，除了協助教師了解學生的已有知識如何影響他們對分數概念的認知和建構，亦幫助學生提升對分數概念的理解。

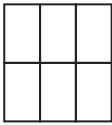
(2) 加強實作活動，深化概念掌握

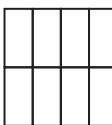
利碧嘉(Liebeck, 1990)認為兒童對數學知識的認知，與他們的生活經驗有密切的關係，故提出ELPS作為學習數學的策略。ELPS指出兒童學習數學，是需要對所認識的物件產生實作經驗(Concrete Experience)的認知。這經驗可由兒童的親身體驗和具體操作所產生，並運用語言(Language)描述相關的認知經驗，然後，學生能運用圖象(Pictures)和數學符號(Symbols)表達整個數學概念，以豐富對數學概念的認識。

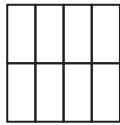
我們運用ELPS發展學生的分數概念，在小三的分數課程增加實物操作的學習活動，讓學生透過參與具體操作的學習活動，加深對數學概念的掌握，經歷由具體至抽象，循序漸進地理解箇中的數學概念，提升學生的學習效能。因應學生的學習需要，我們首年較為着重加強學生的實作經驗和數學語言的聯繫，透過多元化的學習活動，讓學生加強對分數的「數字感」，從而建構數學知識。

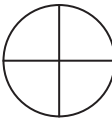
前測有以下題目：

依分數把下列各圖填上顏色。

a)  $\frac{1}{3}$

b)  $\frac{1}{4}$

c)  $\frac{1}{8}$

d)  $\frac{1}{4}$

前測結果：大部分學生能按所定的分數在圖(c)和(d)的方格填上顏色，只有約半數學生能準確在圖(a)和(b)填上顏色。顯示學生較能掌握當圖形的「等分」數目與分母相同時，分數數值的表達；惟當「等分」數目與分母不相同時，較難明白分數數值的意義。究其原因，教科書多以圓形表達分數的整體，惟分數的表達是多樣性，還可以用其他的圖形，如長方形來表達。


透過前測結果，教師能夠掌握學生對分數的理解和難點。因此，我們的教學設計著重分數概念多元化的表達，以幫助學生建構分數概念。根據經驗，教學中若只給予學生單一類型的例子，並不能幫助學生透徹明白當中的數學概念。因為數學題目是多樣性，當分數以不同形狀的圖形出現時，學生未能將


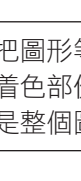
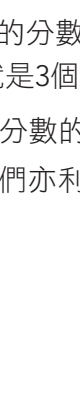


已學的知識，應用在新的數學問題上。所以，在教授分數概念時，如「等分」，我們利用不同形狀的手工紙，如正方形和長方形等，進行實作活動，豐富學生的學習經驗，從而提升他們對部分與整體概念的理解。

(3) 強化數學語言，引入單位分數

數學語言是思考數學的載體；有系統地訓練學生的數學語言，有助他們清晰表達數學概念及發展數學思維。

我們在教授小三分數時，著意加強學生數學語言的訓練，使他們能準確表達分數概念。學生會以「等分」來表達圖形平均分成的份數。例如：這圖形  以數學語言表達：把圖形等分成()份，着色部分佔了()份，是整個圖形的()。教學設計如下：

寫法與讀法		
		
把圖形等分成()份， 着色部份佔了()份， 是整個圖形的()。	把圖形等分成()份， 着色部份佔了()份， 是整個圖形的()。	把圖形等分成()份， 着色部份佔了()份， 是整個圖形的()。
寫作： $\frac{1}{2}$ ← 分子 ← 分線 ← 分母	()	()
讀作：二分之一	_____	_____

小四的分數課程承接小三分數的教學策略。在教授小四分數前，我們亦進行前測，發現學生對整體作為「可變的1」的概念尚未清晰。為提升學生對「可變的1」的掌握，我們引入「單位分數」(Unit Fraction)，使學生對每一個圖形所表達的分數值有準確的掌握。單位分數能夠組成所有的分數，可以作為分數運算的基本單位，例如： $\frac{3}{5}$ 就是3個 $\frac{1}{5}$ 。單位分數除了幫助學生掌握真分數的概念和表達，亦能幫助學生學習真分數、假分數和帶分數的互化，以及分數的加法和減法。另外，學生透過圖示，能夠清楚理解單位分數的圖像意義；我們亦利用分數磁石板及圖示等教學工具，幫助學生學習分數的加法及減法。



以下是部分數學語言在分數課題的表達：

分數課題	算式	數學語言
分數加法	$\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$	3 個 $\frac{1}{5}$ 加上 1 個 $\frac{1}{5}$ ，等於 4 個 $\frac{1}{5}$ 。
分數減法	$\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$	3 個 $\frac{1}{5}$ 減少 1 個 $\frac{1}{5}$ ，等於 2 個 $\frac{1}{5}$ 。
分數乘法	$\frac{1}{4} \times 3$	3 個 $\frac{1}{4}$ ，即 $\frac{1}{4}$ 的 3 倍。
分數乘法	$1\frac{1}{8} \times 3$	3 個 $\frac{9}{8}$ ，即 $\frac{9}{8}$ 的 3 倍，即 $\frac{27}{8}$ 。

(4) 連貫教學策略，提升學習效能

為使學生更有系統地學習分數，我們在校本課程上加強課程規劃和教學策略的連貫性，特別是實作活動的運用和數學語言的訓練，以加強學生對分數概念的掌握和數學思維的發展。

數粒能幫助學生掌握除法和分數的概念。小二在學習除法的課題時，學生在課堂上已經運用數粒，理解除法的均分和包含概念；在小三分數的教學設計中，由於學生已經能夠運用數粒發展數學概念，所以，學生能夠透過數粒等學習活動，理解分數中的概念。

摺紙和塗色等實作活動是掌握分數的重要學習策略。在教授小三分數時，實作活動幫助學生清晰理解「等分」概念；在小四分數加減的課題，實作活動能夠幫助學生理解分數加減的圖像意義、亦運用摺紙幫助學生比較分數的大小；在小五的分數除法，學生透過摺紙的學習活動，理解分數除法的包含意義。

數學語言能發展學生的數學思維。教學中著重發展學生的數學語言，「單位分數」除了幫助學生掌握小四的分數運算外，亦可以協助他們理解小五的分數除法，例如： $3 \div \frac{1}{4} = 12$ 可以表達為 3 包含 12 個 $\frac{1}{4}$ 。

經驗總結和反思

分數概念如何建構？如何為學生發展有效的學習策略，加強對分數的理解？大角嘴天主教小學(海帆道)的教師透過這次經驗分享會，分享如何善用備課會帶動校本課程的發展，提升學生對分數的理解和掌握。是次分享會的分點包括：

- (1) **學生的已有知識對分數學習的影響**——我們透過「前測和後測」得悉學生對分數的先入為主的觀念，並藉此修訂教學內容和策略，從而針對學生的需要，幫助他們建構分數概念。
- (2) **教學範式的轉移**——我們過往較多關注如何教授課題內容，較少關注學生在學習中的概念建構和思維發展。透過共同備課，我們重新思考學生的學習過程，探究他們是如何學習數學，並加強他們掌握數學知識的連貫性。



- (3) **數學策略的連貫性**——學生在學習上需要有系統和連貫性的學習策略，理解和建構數學概念，發展數學思維。我們在分數縱向課程的發展已見成效，學生普遍能夠運用數學語言表達分數，在未來發展，我們持續深化分數課程的縱向發展，並優化教學策略。
- (4) **運用學習數據、回饋教學**——我們透過分析課堂教學情況、課業表現和測考表現，持續評估學生的學習情況。我們除了發現到學生能運用數學語言表達數學概念和發展數學思維外，還能應用在其他的數學課題上。為學生提供多元化的學習活動，不但能豐富他們的學習經歷，亦能提升他們學習的參與和自信心。

參考資料

1. Bransford, J., Brown, A., & Cocking, R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, and Experience & School*. Washington, DC: National Academy Press.
2. Liebeck, P. (1990). *How children learn Mathematics: A guide for parents and teachers*. Penguin.
3. Suzanne, D. M., & Bransford, J. D. (2005). *How students learn: History, Mathematics, and Science in the classroom*. Washington, DC: National Academies Press.
4. 香港課程發展議會 (2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。

