數學　M02 / M08

範疇： 數

題目： 建構「分數」中的「相對值」概念

講者： 林敏恆先生（高級學校發展主任）
何智盈老師、馬家榮老師（嶺南大學香港同學會小學）

分數的「相對」本質

就小學階段而言，分數具有兩個基本概念。其一，分數是數的一種，跟整數和小數一樣，用以表示一個絕對值，一個量的大小或多少。

> 例一：
>
> $3\frac{1}{3}$ kg 的特級大米和 $4\frac{3}{4}$ kg 的普通香米混合包裝一起，共重多少？

例一中的兩個分數標示各樣米的具體重量是多少。這裡的「$3\frac{1}{3}$」是一個絕對值，簡單地說，$3\frac{1}{3}$ kg 就是比 3 kg 重，比 3.5 kg 輕。與整數或小數相比，分數的外在形式具有獨特的結構，包含著分子、分母和整數部分；運算上亦略具複雜性，不同的部件（分子、分母和整數各部份）在運算中有不同的操作和計算方式。一般的小學生在學習初期不太習慣，但總的而言，學生在這方面的學習，普遍仍能有效掌握。

分數的另一概念卻是普遍學生的學習難點，它蘊涵著一個抽象的「相對」本質（James & Pollard, 2012）。所謂「相對」就是比較，是一個數量與另一個數量的比較。

> 例二：
>
> 用去了原有款項的 $\frac{3}{4}$，還餘多少？ （原有款項的幾分之幾）

仔細一點，比較可分為兩種：「基本比較」和「指定基準比較」。例二中的「$\frac{3}{4}$」標示著用去款項與原有款項的比較，跟學生在初小階段慣以數字表示多少有明顯的差距，學生需要透切認識和理解。「基本比較」是部分與整體的比較，譬如：計算交通支出是家庭收入的幾分之幾？ 這裡交通支出明顯從家庭收入中撥出，是收入的一部分，直觀和具體，學生多能理解明白。

另一方面，普遍小學生對「指定基準比較」會感到抽象難明。譬如：本月的旅客入境數字是上月數字的 $\frac{3}{4}$，由於兩個月份的入境數字獨立統計，並沒有互相從屬。這裡的「$\frac{3}{4}$」所標示的，是兩個入境數字的倍比關係，而不是具體數量的多少，對還在第二學習階段的學生而言，實在不易理解。當教程進展至五年級的分數乘法和分數除法，以及六年級的百分數應用

時，並且普遍考卷混雜著兩類比較的數題，學生能否深入理解和掌握分數的「相對本質」會是解題的關鍵。

過往老師從已知的角度按著不同練習題的類別，以「部分」與「整體」套用到題中的不同數量，又或把某一數量看作「單位 1」，從而作出數量之間的比較計算，惟效果並不理想，普遍學生仍未能從不同的情景中，綜合和抽象出數量之間的「相對關係」或分數所標示的相對性概念。相當部分的學生，在不了解分數這個意義的情況下，只能透過記憶運算法則完成機械計算，未能歸納一個通則作為自己分析數題的思考方法。

學習分數是對「數的認識」的一個跳躍

小學生從學習整數延伸至學習分數，是由具體認識數的絕對值拓展至把數理解為標示相對值的一個進階，亦是對「數的認識」的一個頗大的跳躍。

經驗顯示，老師在這個課題上單憑直接講述，以及傳輸知識給學生，難以達至理想成效。嶺南大學香港同學會小學的老師進行校本課程發展，在調適五年級的分數乘和除，以及六年級的百分數應用時，重新思考教程，認為有需要把分數的相對值概念聚焦處理，整理學習內容，適切地引入相應的概念詞組，凸顯不同量值的相對關係。再者，老師亦認為學習高階概念是一個需要學生積極主動，在認知層面積極（cognitively active） 的建構過程，同意「*不要用我們對知識正確性的強調作為讓個體接受它的理由，不能用科學家、教師、課本的權威來壓服學生。學生對知識的接受只能靠他自己的建構來完成，以他自己的經驗、信念為背景來分析知識的合理性。學生的學習不僅是對新知識的理解，而且是對新知識的分析、檢驗和批判*」（馮忠良、伍新春，2010，頁 155）。因此，在施行方面，結合建構主義學習理論，課堂設計以引導發現（guided discovery）的形式進行，學生學習當中的概念時，會審察和計算一些情景相類的數題，老師指示學生觀察規律，與同學討論以後，明確要求他們表述對學習所得的理解和綜合想法。同時，透過師生、生生的提問和對話，幫助學生修正對概念的正確認識。期望在這個教學設計和教學過程中，學生能透切認識和穩固掌握分數中的相對值概念。而老師方面，亦能學會運用建構取向的對話教學（Alexander, 2008），以解答一路以來教授數學中的高階概念時的疑惑和困擾。

調適教學設計，釐清分數的「相對性」涵義

在思考如何設計教程時，首先要釐清「相對」包含或顯示怎麼樣的意義。當我們提及「相對」一詞，我們就是在談論「比較」。確切一點，是在比較兩個數量，而「比較」的作用是獲得一個參照的指標，讓我們能進行深入分析，了解問題和尋找解答方案。

例三：

曉盈考卷上的得分是 60，我們能如何分析或評論她的成績？

當只有得分的絕對值 60，而沒有其他的參考數字，我們是無法或沒有準則去做出分析或評論。若能獲得提供多一點數據，我們的評論就變得有所依據了。

第一組：

1. 若試卷總分為 100
   - 拿 60 跟 100 比較，我們會認為曉盈的成績不理想。
2. 若班中同學的最高得分為 72
   - 拿 60 跟 72 比較，我們會認為曉盈的成績不算差劣。
3. 若全班同學的平均分是 50
   - 拿 60 跟 50 比較，這時我們會認為曉盈是成績良好了。

在例三的第一組分析中，帶出兩個重要學習點：

1. 單單只有一個數量的絕對值，沒有其他參考數字，即沒有可依據的準則，我們無法深入分析問題。學習高階數學，同學需要同時掌握數量的絕對值和另一個指定的參考數字，才能進行深入分析，掌握問題的全圖。
2. 相類近的情景下，拿不同的數字作參考分析，結果可帶出多元的結論的。故此，選擇和找尋參考數據是非常重要的。

借助這個例子，在教程中我們引入兩個詞組，把數量的絕對值稱為「真值」，拿作比較用的指定數字稱為「參考基數」。

同樣的情景換個形式：

第二組：

4. 曉盈的測考結果只有總分的 $\frac{3}{5}$，我們會認為成績不理想。
5. 她的測考結果是最高得分的 $\frac{5}{6}$，她的成績也許接近優等。
6. 她的測考結果是平均分的 $\frac{6}{5}$，即比平均分高出一些，我們會認為令人滿意吧。

上述兩組資料都在說出同樣的評論和分析，只是表述的形式有些不同。第一組資料，是提供兩個數量的絕對值——曉盈的實質得分和用作依據的參考數字。第二組卻因著不同情況，提供一個分數作為數據，而這樣的一個分數數據雖沒有顯示得分多少，但它標示著兩個數量的「相對」關係——把兩個數量關聯一起做比較，提供一個充分和合適的參考指標，從而進行分析和判斷。這個分數數據，我們又稱作「比值」。

再換另一套說法：

第三組：

7. 曉盈的得分相對總分而言，只有 $\frac{3}{5}$。
8. 她的得分相對最高分而言，有 $\frac{5}{6}$。
9. 她的得分相對平均分而言，更有 $\frac{6}{5}$。

透過這樣的來回表述，分數的相對本質就更加明顯了。整個教程就是以「真值」（數量的絕對值）、「參考基數」（指定的比較對象） 和「比值」（倍比相對值） 概括分數的相對本質和分數應用中經常涉及的倍比關係。

這是一個實驗教程，學生能否借助這三個詞組深化認識分數的相對本質? 是加深困惑? 還是絲毫沒有幫助? 以及教程對哪個能力組別的學生有較佳的效果? 均是我們關心探究的重點。

教程的具體施行

嶺南大學香港同學會小學校本編訂的教程，主要是與數學課程指引中 **6N4 百分數（二）** 連結，在具體教授百分數應用前，安排 4 至 6 個教節與學生共同聚焦探討當中的相對值概念，附加的學習重點包括：

1. 學會如何比較兩個數量，以及認識比較兩數的意義。
2. 認識「真值」、「比值」和「參考基數」。
3. 百分數的「比值」意義及「比值」與「參考基數」的關係。
4. 掌握「真值」、「比值」和「參考基數」的計算關係。
   - 比值（百分之幾）= 真值 / 參考基數
   - 真值 = 比值 x 參考基數

首兩節課，老師提供不同的比較組合，讓學生從中領悟如何透過「比較」兩數帶來新的訊息，並為計算「比值」提供意義。再者，學生在比較的過程中，普遍能認知到兩個數的區別，其一是已知的數量，而另一個數則被看作參考基準之用。藉著這個經驗，老師引入「真值」、「比值」和「參考基數」三個概念詞，讓學生能有效和準確地表達對課題的認識和理解程度。接著是一節計算「比值」課（即求百分數），學生在不同的情境問題中，辨識參考基數，從而明白「尋找參考基數」是計算的關鍵。經過三節課後，學生大致對分數的相對值概念有概括的認識，並能初步學會和運用概念詞回應提問。然而，他們普遍仍未能穩妥掌握「比值」和「參考基數」的含義和關係。學生腦子裡仍存在著不少的疑惑、誤解以及思考盲點，要幫助他們釐清想法，加強認識概念的深度和應用上的闊度，補上一節對話課有其必要。

建構取向對話教學的設計和目的，是要給學生提供一個輕鬆和安全的學習環境，讓他們把心中不完整、不成熟的想法帶到對話中，既使老師掌握他們所及至的程度，同時能捕捉課題的關鍵難點，進而作出深入探討或加以整理和修正，期望學生走過這樣的一個思考歷程，能對相關概念有更透徹的理解。

事實上，在實踐的課堂中，學生均能舉出具體例子，展示對「真值」的認識。在理解「比值」方面，經過反覆提示和討論，學生亦能舉出以下例子：「$\frac{3}{4}$ kg 的麵粉」和「家庭收入的 $\frac{3}{4}$」，解說「$\frac{3}{4}$」在前者表示「真值」而在後者則代表一個「比值」。當學生被問及如何用文字（不許以 100/100 或完全數式）表達 100%時，他們都能提供「全部」、「整體」、「總和」、「十成」和「單位 1」等字詞作表達。多加一點提示後，有學生補充了「最高」這解釋，經提示後，大部分學生都能想起「參考基數」這概念，並點頭示意認同。整個課堂透過沒有拘

限的對話，師生和生生互相交流想法，達到了共同建構概念的預期果效。而在另一個對話片段中，老師發問如何從題目的文字裡辨認參考基數時，學生除以「總體」和「全部」等概念回應外，亦有學生提出「餘下的」也可代表參考基數。這下子給全班同學一個叫人疑惑的難題，又因此再次掀起全班的討論和思辨了。雖然如此，這不也是在對話教學中老師樂見的情況嗎？

結語

綜觀是次對百分數教學的深入探討和教學安排，教師在處理這個課題教學時，比以往更著重教授「概念」，他們先花上數個教節去處理相關的概念教學，讓學生認真思考分數相對概念中的「真值、比值和參考基數」。在教學策略上，選擇通過對話教學作建構的平台，讓大部份學生能參與整個討論，並提出各人的想法，構建共同思考的歷程。學生不但能夠透過掌握相關數學語言去理解有關的概念，也能同步通過運用這些數學語言對有關的概念進行討論和作更深層次的理解，更能與教師溝通，讓老師具體掌握學生未能充份理解的學習點並進行解說。誠然，普遍數學老師認同概念教學是數學教學的重要基石，然而概念教學的核心組識該是什麼、其流程安排，以及該以哪種的教學策略使概念教學更為緊扣學習重點，使教學難點得以解破和處理，這還有待同工們進一步的探索和掌握。

參考資料：

1. Alexander, R. J. (2008). *Towards Dialogic Teaching: Rethinking Classroom Talk.* (4th Edition). York: Dialogos.
2. James, M., & Pollard, A. (2012). *Principles for Effective Pedagogy: International Responses to Evidence from the UK Teaching & Learning Research Programme.* Abingdon: Routledge.
3. 馮忠良、伍新春（2010）。《教育心理學》。人民教育出版社。