數學　M03 / M09

範疇：　圖形與空間

題目：　配合實作評量之教學舉隅──小一及小二「立體圖形（一）及（二）」和「平面圖形」的教學策略分享

講者：　曾倫尊博士（高級學校發展主任）
高英棠老師、莫倩婷老師、鄺詠思老師、湯佩儀老師、譚傑強老師
（閩僑小學）

引言

在 Howard Gardner 的多元智能理論中，指出空間智能是我們生活學習的基本能力，更是藝術、科學、數學以至天文學不可或缺的能力。空間智能存在於圖像識別、空間定向、幾何等之中（Gardner,1993）。在 Howard Gardner 的多元智能理論所指的空間智能，是指以三維空間來思考、操作物件的位置、製作或解構圖形，當中又可分為形象的空間智能和抽象的空間智能兩種能力。空間智能強的人對色彩、線條、形狀、位置及它們之間的關係較為敏感，能準確地感覺視覺空間，並能把所知覺到的表現出來。空間智能對學習數學科「圖形與空間」範疇尤為重要，我們的課程指引安排讓學生逐步建立空間智能，老師可按學生的認知發展，配合實作評量之教學設計，培養學生的空間智能。

學生對空間概念的認知與發展

學生在「圖形與空間」範疇的學習，應從他們生活經驗中熟悉的物體開始，首先透過直觀辨認，再進行操作，來發現物體的特點，以確立物體在空間的基本概念。皮亞傑（Piaget, 1965）認為兒童空間概念的發展經過三階段，首階段為拓樸階段，幼兒屬前運思期，兒童在空間範圍內觀察物體時，僅能描述物體的特徵。第二階段為投影空間，兒童位於運思前期與具體運思期之間，能逐漸領會物體位置與物體間的關係，並漸漸形成二度和三度空間的物體相互轉換的概念，然而這種認知仍無法擺脫視覺的影響。第三階段為平面空間，即為具體運思期後之形式運思期，兒童對空間的理解能力更成熟，他們能擺脫視覺的迷惑，將物體和物體間的空間關係統整為整體概念。Piaget & Inhelder（1967）的理論讓我們了解兒童在「圖形與空間」範疇中如何發展概念，理論提及兒童從逐步組織具體活動經驗及內化行為中，建構有關空間的概念，這些概念的發展並不是單從閱讀學習得來的，而是從不斷累積的操作經驗而來。這理論在其後很多研究中均得到支持及肯定，例如 Clements & Battista（1992）提到兒童在空間的認知能力會有不同程度的發展差異，這些差異主要不是基於先天的能力，而是在於後天，從環境中對實作活動的經驗。

學生對空間方位的認知與發展

根據皮亞傑的兒童認知發展理論，Hart & Moore（1976）延續了認知發展中階段論的概念，提出空間定位參考系統，可分為：（一）自我中心參照系統，相當於皮亞傑的前運思期，大約是學前階段（二至七歲），兒童是以自我為中心的。（二）固定參照系統，兒童已進入皮亞傑的具體運思期，可以透過行動，想像空間與自我是可分離的，此階段兒童可以指定物件或他人為中心，透過物件四周的連結來判定物件之間的相對位置與空間關係。（三）協調的參照系統，兒童已進入形式運思期，即能完全脫離具體的內容運作，以抽象的形式操作。十一、十二歲的兒童可以不用透過操作便能與具體物件和空間互動，並進行統合的思考。

由此可知學生對空間方位的認知情況，比較學前兒童與小一、二學生的概念特徵，其差異主要由自我為中心至以他人為中心，自我中心意指物件和自己的關係，他人為中心則指出任何物件或位置都可成為中心，然後再思考物件之相對位置。因此學生在認識空間方位時，先向學生說明那個物件為中心，是很重要的。皮亞傑認為學童對於空間的認知發展為：三歲幼兒能分辨上、下的物體關係；四歲時能分辨前、後的物體關係；五歲以後左、右概念開始發展。對於前、後和左、右的方位是有相對性的，跟學生本身位置的改變而發生變化，故小一學生辨別比較困難。因此學生辨別空間方位，應先以自我為中心開始來判別方向，逐步發展為以客體即其他的人或物體為中心來判別。

課程指引在小一及小二中「立體圖形」與「平面圖形」的學習

在小一時，學生從直觀辨別各種立體圖形，需要把它們分類為柱體、錐體和球體，並且能以上、下、前、後、左、右等，簡單描述兩個立體圖形間相互的位置，亦會透過觀察立體圖形，從立體圖形中認識平面圖形，並直觀地辨認各種平面圖形，如三角形、四邊形、五邊形、六邊形及圓形，並能就圖形的形狀、大小、顏色或其他特性作出分類，進而直觀地辨別正方形及長方形。最後學生會再次以上、下、前、後、左、右描述兩個平面圖形間的相互位置，及用不同方法製作平面圖形。這部分的課程設計，讓學生由生活環境經常接觸的立體圖形開始，運用具體的經驗學習把立體及平面圖形分類，當中學生最感困難的部分，就是以自我為中心，運用上、下、前、後、左、右，來正確地描述兩個圖形的相互位置。

在小二時，學生會從立體圖形不同的側面中，加深對立體圖形的認識，例如一個長方體有兩個底，兩個底都是相同的長方形，它有四個側面，四個側面都是長方形，然後學生需要以直觀辨認更多立體圖形，如角柱、圓柱、角錐和圓錐，從而把各種立體圖形分類，再製作立體圖形。到學習四邊形（一），學生需要認識一些常見的四邊形，包括長方形、正方形、梯形及菱形，再分辨正方形及長方形的相同及不同之處，最後用不同的方法製作四邊形。

課程指引與教學理念

課程指引的安排配合兒童對空間概念及空間方位認知的發展，亦合乎 van Hiele 的兒童幾何思維發展理論（Burger & Shaughnessy, 1996）。根據理論，兒童幾何思維發展分為五個階段，由零階段至第四階段分別為：認識、分析、關係、演譯及定理，而小學課程的要求約只到達第二階段，即關係階段。van Hiele 認為各層次間成長過程主要是倚靠老師指導，因此教學的組織與方法，教材的選擇與使用是非常重要的，而實作活動對空間概念的理解亦十分重要

（Piaget & Inhelder, 1967）。在教學活動設計上，van Hieles 提出教學階段論，其順序依次為：（一）探詢資訊、（二）引導方向、（三）解釋說明、（四）自由探索、（五）整合（Clements & Battista, 1992）。學生空間概念的發展，除了隨年齡而提升外，還要配合學生的發展層級，在教學過程中讓學生操作實體模型、自由探索及解決問題，學生才能從實作活動中透過操作學習，進而導引學生發展正統之空間概念。

基於上述文獻探討所歸納之空間概念發展特性，閩僑小學老師希望按學生的認知發展、非華語學生的學習特點及運用實作評量之教學設計，提出有關在小一及小二的立體和平面圖形學習中，可以透過教學設計，與學生之生活經驗相聯結，給與學生更多操作活動的經驗，提供學生接觸多種變化圖形的機會，並鼓勵觀察、預測、思考、描述等探索性行為，讓學生從不同的操作活動中建構概念，促進學生空間概念的發展，若學生能有豐富的實作活動經驗，流利的語言表達能力，透過視覺直觀來描述，將有助建構正確的立體及平面圖形概念，亦有利他們建立其他相關概念，增進學生有關空間概念的學習與認知發展。

另外老師們非常認同以實作評量作為一種教學策略，可實際地提升教與學的質素，他們於是在兩級的「圖形與空間」範疇實行。在共同備課時，首先共同為學生訂立明確的目標，也讓學生瞭解整個實作評量的考量方法及評分標準，將評量的標準明顯化，促使每位學生積極反省，讓學生明白在學習中進行活動時如何努力才能達到標準，並用標準作為教與學的目標。由於日常教學活動有良好的評定設計，可提升學生對活動目標的理解及明確掌握老師的期望，故老師在設計日常教學活動時，需要對所要評量的表現，以漸層的方式列出，即由淺入深循序漸進地推展，在教學時也需要按同學的表現作出適當回饋，以調節評量標準。

教學理念的實踐

立體圖形的教學過程

由於在零階段中，學生會根據立體圖形的整體外觀認識圖形，而不考慮它的部分，學生從直觀分析圖形的簡單特性，並認識圖形的名稱，然後描述圖形的簡單特性（例如：尖頂、能疊高或能滾動等），並作分類。針對本層次的學生，老師安排許多透過感官的操作活動，讓學生進行分類、滾動、堆疊、描繪、觸摸與複製等活動，幫助學生注意到圖形的構成要素。

整個教學設計主要包括五個教節，首先讓學生將立體圖形簡單分類，同學將日常生活所見的盒子，按不同的分類方法加以分類，同學可按顏色、外形、大小等原則分類，然而同學並不懂得如何自訂分類準則，需要老師更多明確的引導，於是老師指引學生按盒的特徵來分類，例如運用有尖頂的、能疊高的或能滾動的特徵來分類，從而帶出立體圖形可分成有尖頂的、平頂及能疊高的，或是有曲面及能滾動的，再帶出柱體、圓柱體、錐體、圓錐體及球體等立體圖形的名稱。然後老師再引導學生解釋物件的命名，如柱體是因為它是平頂及能疊高的；圓柱體是平頂、能疊起、有曲面及可滾動的；錐體是尖頂又不能疊起的；圓錐體是尖頂、有曲面及可滾動的，而球體則是圓圓的及可滾動的。

教學過程中，老師會運用肢體動作配合數學語言來形容每一個立體圖形，然後請同學跟隨描述，務求令同學能講出每一種立體圖形的特性，並解釋立體圖形分類的原則和特性。最後，老師需要教授同學描述立體圖形的相對位置，著學生運用上、下、前、後、左、右等描

述立體圖形的位置，同學容易混淆當中涉及的數學語言，需要老師經常提示要以自己為中心，才能運用上、下、前、後、左、右，正確地描述兩個圖形的相互位置。

二年級老師在教授立體圖形之前，首先給予同學一份前測，測試同學對各種立體圖形的認識，發現同學能寫出各種立體圖形的名稱。由於今年重點認識各種立體圖形的特性，設計的實作活動亦針對立體圖形特性，第一個實作活動是讓學生認識柱體有相同橫切面的概念，老師運用美勞科常用的吸水棉布，為同學剪下不同的圖形，例如正方形、長方形、三角形、五邊形、六邊形及圓形，再讓同學將吸水棉浸在水中，看有什麼發現，同學都能總結出不同形狀的吸水棉都會膨脹成柱體，而這柱體的面和底都是相同形狀的，即是三角形的吸水棉吸水後會脹成三角柱體、圓形的吸水棉吸水後會脹成圓柱體等。

教授柱體後，老師便會引入錐體，同學在探索這些錐體的特徵時，成功地指出錐體是只有一個尖頂及一個底的。當老師出示平放的三角柱體時，同學都沒有誤以為是錐體。當同學都能成功地分辨柱體及錐體後，老師便教授同學為各種立體命名，由於英語名詞的複雜性，老師特別精心設計了一個表格來引導同學命名，同學只要按工作紙的指示，找出立體圖形的底部形狀，圈出底部平面圖形的名稱，再決定該立體圖形是柱或錐體，便可寫出該立體圖形的名稱。大部分同學都能從活動中成功地為不同的立體命名，在自行命名時感到非常滿足，小部分同學觀察立體圖形的平面圖時感到困難，然而當老師出示實物，並引導同學將立體圖形放置成工作紙上的模樣時，同學便能準確辨認出該立體圖形是柱或錐體，解釋該立體名稱的由來。

最後，老師會引導同學製作立體圖形，並讓同學接觸各種不同的摺紙圖樣，自由地按虛線摺疊，然後估計立體圖形的名稱，嘗試解釋命名的理據。在這個學習過程中，同學的興趣很大，而且大多能準確地估計出立體圖形的名稱，並以柱或錐體的特徵來解釋當中的理據。在延伸學習階段，老師在課室內放了數盒塑膠枝條教具，讓同學在小息或午膳時，運用塑膠枝條製作不同的立體圖形，並總結製作各種立體圖形所需塑膠枝條的數目及技巧。

平面圖形的教學過程

在第一學習階段，學生學習平面圖形時，會先從觀察與操作中辨認圖形的特徵，這些特徵可幫助學生建立分類的概念。過程中，學生會透過觀察立體圖形，從立體圖形中認識平面圖形，然後在生活中搜集各種平面圖形，再從平面圖形的邊的數目來命名，如三角形、四邊形、五邊形、六邊形及圓形等。當同學掌握平面圖形的基礎概念後，老師會以非例子圖形（例如不閉合的圖形或包含有曲線的圖形）來挑戰同學，考查學生對概念的清晰程度。

進入第二階段，在這個階段的學生應該具有豐富的視覺辨識經驗，能進一步建立圖形屬性的關係，例如一個四邊形，以圖形組成要素來看，學生可以發現長方形都有四條邊，這四條邊剛好分成兩組，一組是兩條較長的邊，一組是兩條較短的邊，而且兩條較長的邊長度相同，兩條較短的邊長度也相同。當注意到長方形的角時，學生可以發現長方形都有四個角，這四個角都相等，而且每一個角都是直角。學生從中能夠歸納出圖形的屬性，並能辨認圖形及把圖形分類。然而，這個階段的學生需要從具體的實作活動中學習，故此老師安排許多圖形的實作活動，幫助學生觀察構成圖形的要素，以熟悉各種圖形的性質，幫助學生探索圖形與圖形之間的關係。

學生初步認識平面圖形後，老師會讓同學運用間尺，量度正方形的四邊，使同學發現正方形的四邊長度是相等的，而長方形的四邊中，分別有兩對對邊長度相等。然後會介紹菱形及梯形，老師會讓同學透過實作活動，量度菱形的四邊長度，同學會發現菱形是四邊長度相等的，只是大部分同學難於分辨菱形和正方形，因為他們對直角的觀念不強，正方形有四個直角，而菱形的四角並不是直角，故同學容易混淆這兩種形狀。最後老師會引入梯形，由於有不同種類的梯形，同學較難作出分辨，尤其是當老師將梯形轉變放置位置時，他們便難於辨別。

總結

整個縱向課程約實施了兩年，老師就各有關立體圖形與平面圖形課題內的不同難點作出深入的探討，在教學中加強實作評量活動，及嘗試運用 van Hieles 提出的教學階段，首先開放地讓同學自行探究各種立體或平面圖形的特徵，再由老師引導同學總結定義或概念，從而令同學可運用數學語言解釋及說明所學，並整合學習重點，以此貫通兩級學習活動的設計。

經過多次研課及觀課，老師們累積了一些設計活動及在教室中實施實作評量活動的經驗，認為應盡可能提供學生操作活動的機會，並配合肢體活動與數學語言的聯繫，以加強學生對數學語言的記憶，也可以增加學生學習的興趣，提高學習動機，減輕學習焦慮。老師在設計實際操作的情境時，亦盡可能強調高階思維能力的展現，讓學生可以根據問題的情境，透過正確的推理過程，思考自己認為合理的答案，並以數學語言將結果表達出來。老師希望透過分享會與其他老師交流校本實作評量活動的教學經驗，包括從課程設計到教學實施，並提供一個具體明確的程序與策略，以及分享老師在教學實踐中累積到的智慧。

參考資料：

1. Burger, W.F., & Shaughnessy, J.M. (1996). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), 31-48.
2. Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.
3. Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences: The theory in practice.* New York, NY: Basic Books.
4. Hart, R.A., & Moore, G.T. (1976). *The development of spatial conception: A review in Image and Environment*. Chicago: Aldine Publishing Co.
5. Piaget, J. (1965). *The child's conception of the world.* Totowa, NJ: Littlefield, Adams.
6. Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: W. W. Norton.