# 數學 M06

範疇: 數

題目: 三年級除法的難點處理——長除法的運用及應用題中的餘數處理

講者: 陳鋼博士(高級學校發展主任)

李智恩老師、林康娟老師(佛教中華康山學校)

長院法是小學數學科三年級的一個重要課題。學生學好長除法,才容易應付四年級兩位數或三位數除以兩位數的除法;並在六年級時,有好的基礎學習小數除法。根據教師觀察,學生回答除法的問題時,表現皆遜色於加法、減法及乘法的問題。除法的應用題,題型變化較多,也比另外三類算式的應用題困難。在解一道除法應用題時,學生除了需要正確計算除式,還要明白應用題描述的情境,方能恰當地運用商或餘數解題。本環節將探討學生在除式計算和餘數處理應用題的學習困難,及提出解決辦法。

### 改善長除法的教學策略

在長除法的教學過程中,我們期望學生既明白長除式的計算步驟,也明白運算的原理。 畢竟,快速準確的計算程序和清晰的數學概念,都是學好數學的重要元素(National Research Council, 2001)。佛教中華康山學校的教師,同時運用了幾項教學策略,協助學生學習長除法。 以下我們將講述學校採用的方法,供各位參考。

## (一) 計算長除法的方式

我們先談談長除法的計算方法,請看看以下計算除法直式的例子:

4)80	<u>20</u> 4)81	$   \begin{array}{r}     21 \\     4)87 \\     8   \end{array} $
<u>80</u>	8	7
	1	_4
		3
例一	例二	例三

在例一,算式顯示了 0 和除數 4 的積(直式中最後一行的零)。但在例二,卻沒有顯示同一個算式的積。若參照例二的做法,例一又能否改寫如下?

1

學生不明白為什麼在算式中有時要寫零,有時卻可以省卻不寫。

另外,比較例一和例三。例一的算式似乎較簡單,故沒有分層計算。例三似乎較複雜,故需要分層計算。但除法直式,何時分層,何時不分層,判別的標準是什麼?學生又是否容易掌握這標準?三位數除以一位數的課題,也有相似的情況,我們可看看以下例子。

200 4)800 800	$ \begin{array}{r} 123 \\ 2)246 \\ \underline{2} \\ 4 \\ \underline{4} \\ \underline{6} \\ \underline{6} \end{array} $	$   \begin{array}{r}     102 \\     6)613 \\     \hline     13 \\     \underline{12} \\     1   \end{array} $	$ \begin{array}{r} 178 \\ 2)357 \\ \underline{2} \\ 15 \\ \underline{14} \\ 17 \\ \underline{16} \\ 1 \end{array} $
例四	例五	例六	例七

不少學生對除法的計算方法, 感到困惑。不明白省略零的標準, 也不明白分層計算的標準。五花八門的計算方法, 可能是學生學不好的原因。我們認為, 教師教授各類除法計算題, 都採用一致的做法, 學生應該較容易學懂。

其中一種一致及慣常為教師採用的直式計算方法,是每次都運用獨立的一層,計算商的 一個數字。按此做法,計算兩位數除以一位數,直式需要兩層;計算三位數除以一位數,直 式需要三層。現用此方法(稱為**方法一**),改寫例四為例八和例六為例九:

註:運用方法一,例五和例七的寫法不變。

教師表示,學生運用這方法,計算較準確。但在例八,除法直式用了三層,不如例四簡潔。況且,學生就算不用直式,也不難計得 800÷4 的商是 200。用例八的方式,完成一道簡單的除法問題,是否化簡為繁?如何能兼顧例四的簡潔表達形式,及例八的多層計算方法?

黄宇詩(2011)提出了改良**方法一**的辦法(稱為**方法二**):在不退位計算時,直式不必另開一層。現用這辦法,改寫例四、例五和例六為例十、例十一和例十二:

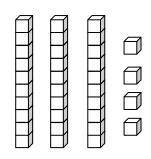
註:例七的寫法不變。

學生利用這方法書寫除法直式,免了累贅的表達,也能有助處理退位的除法。如果學校 希望運用上述方法教授除法,宜注意以下事項。

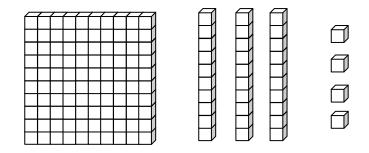
- (i.) 所有數學科教師宜商議妥當,樂意採用一致教法,讓學生由小三至小六,運用 統一的方法解題。
- (ii.) 通知家長及外聘教師(如功課輔導班教師),配合學校的教學方法。

### (二) 講解除法直式的原理

為防學生只是死記硬背長除式的計算步驟,教師會向學生講解長除式的運作原理。以往教師曾用貨幣講解除式,可是學生感到不夠具體,未能說出分物的原理。例如,教師顯示一個 10 元硬幣,問學生把 10 元分給兩人,每人應得多少,學生看著那 10 元硬幣,反而不懂如何回答。故此,我們捨棄了以貨幣為教具解釋長除式的原理;而統一以粒、條、塊示範分物的過程。例如,解釋 34÷2,教師會展示三條和四粒的數粒實物或圖例。



這表示有34件物件。教師然後一邊講解分物過程,一邊解釋長除式相對應步驟的書寫方法。學生看後,更加明白長除式的原理。解釋三位數的除法時,則要用上以一百粒數粒砌成的「塊」。例如,解釋134÷2,便會用以下的圖例。



在這次教學活動中,教師只是借助一些例子,讓學生明白長除式的原理。由於重點是計算,教師只要求學生做少量的分物活動,免得學生花太多時間分拆數粒。

### (三) 強調典型例子

教學初段,學生遇到的困難,包括:(1)不了解直式何時應該要開新的一層;(2)剛學習兩位數除以一位數的計算,忘了基本除法的計算(如 23÷4)。總結初期教學經驗,支援人員發現,強調了以下三例的計算方法,學生往後學習三位數除以一位數時,學習過程甚為順利。

$$\frac{5}{4)23}$$
 $\frac{10}{4)43}$ 
 $\frac{20}{3}$ 
 $\frac{40}{3}$ 
 $\frac{20}{3}$ 
 $\frac{40}{3}$ 
 $\frac{20}{3}$ 
 $\frac{20}{3}$ 
例十三
例十四
例十五

借助以上三個例子,學生明白了要先比較被除數的十位數字和除數,然後判斷商應是兩位數或一位數。解例十三時,教師可要求學生想像 4 人平分 23 件物件。被除數的十位數字是「2」,小於除數「4」, 所以每人不能分到 10 個物件。例十四和例十五,可想像為 4 人平分 43 件物件和 63 件物件,每人能分到 10 件物件(或更多),所以商是兩位數。學生弄明白這點,便能判別何時運用三年級新學的方法(兩位數除以一位數)解題,何時用已有知識(二年級基本除法)解題。

另外,比對例十四和例十五,學生便較容易明白除式何時只得一層,何時需要兩層。在例十四,除式的十位數字沒有餘數,便不需要分層;在例十五,除式的十位有餘數(餘數是2),便應分層。在除法計算的課堂,教師不時抽出三分鐘,和學生重溫這三個例子,鞏固了學生的計算技巧,減少了學生計算的錯誤。

### (四) 鼓勵學生猜想

當學生學好兩位數除以一位數的除法後,教師鼓勵學生,運用所學,解決三位數除以一位數的除法問題。教學時,我們不用直接傳授的教學方法,改為讓學生先猜想、再驗證。教師細分題目後,便先讓學生做練習,期望提高學生的學習動機。由於題目都是還未教的,教師只是鼓勵學生嘗試解題,學生做起題目來,似乎沒什麼包袱;教師邀請學生在黑板做題時,他們也踴躍嘗試。從課堂所見,不少學生能自行猜到三位數除以一位數的計算方法,而未能解題的學生,在聽了教師的講解後,很快便明白。

#### (五) 對比相近的計算題

我們也運用了變易理論(Marton & Booth, 1997) 細心編排教學例子,指導學生對比不同 題型,從而認識學習內容的關鍵特徵,鞏固學生對除法的理解。 例如,計算三位數除以一位數時,我們安排了以下一組對比練習:

學生算到個位時,更了解除式什麼情況下有餘數、什麼情況下有兩層。另外,這三道題的被除數相近,除數相同,學生計算這三題,時間上少於計算一般的練習。故老師能夠安排多組類似的練習,協助學生鞏固所學。

### <u>小結</u>

我們運用了以上方法,協助學生理解長除式的原理,運用簡潔方法書寫長除式,著重講解典型例子,於課業恰當地編排練習,並鼓勵學生勇於嘗試,利用已有知識推測未學問題的計算方法。教師同意,著重了以上幾點,教學時甚為順利,學生也樂意做除法的計算練習。

#### 應用題的餘數處理

除法應用題也是一個學習難點。在這次的分享會中,學校會講解應用題的餘數處理。學 生解答這類問題,不是完成了除法計算,便是以為商就是應用題的答案;其實他們需要明白 分物過程,才能決定最後答案是什麼。如以下這道問題:

現有麵粉 16 句。每 5 包裝成一箱,裝運全部麵粉,最少需要箱子多少個?

學生要清楚分物的過程,並了解剩下的一包麵粉,也需要用一個箱子,才能運用正確的 除法直式解題,並了解最後答案是除式的商加上1。這類問題,學生不易回答。 與課本的做法相似,教師利用變易原理(Marton & Booth, 1997),安排了兩道相似情境的問題,一題是餘數處理的應用題,一題是一般的除法應用題,期望學生細心審題後,能分辨餘數處理應用題的關鍵特徵。兩道問題如下:

- 1. 現有麵粉 16 包。每 5 包裝成一箱,裝運全部麵粉,最多可裝滿箱子多少個?
- 2. 現有麵粉 16 包。每 5 包裝成一箱,裝運全部麵粉,最少需要箱子多少個?

兩道應用題都是有關把麵粉裝箱的活動,不變的是應用題的情境和資料,變的是兩題所問的資料。教師指示學生圈出這兩道問題的不同之處,並和同學討論答案,期望引起學生注意,思考「最多可裝滿箱子」和「最少需要箱子」的意思。課堂活動方面,學生借助數粒,模擬該兩題的分物情況,找出答案。從觀課所見,開始時,有些學生不明白兩個問題的分別,通過教師引導和課堂活動,漸漸多了學生明白,解決這兩題,除法算式不變,變的只是答句和最後答案。

### 總結

在這次教學實踐,支援人員和教師一同深入觀察學生的學習過程,按學生的反應,調節教學步伐和策略,總結得出以上的教學經驗。過程中,學生漸漸明白除法的原理,並且掌握計算技巧。難得的是,學生一直樂於學習,並沒覺得除法難學。誠然,教學方案不只一個,這次的教學嘗試,期望引起教師更多思考,設計更多優良的教學方案。

### 參考資料:

- 1. Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- 2. National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, Eds.). Washington, DC: Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, National Academy Press.
- 3. 黄宇詩(2011)。初小的除法直式,怎樣才是最好?《數學教育》,31期,頁3-6。