

數學課程的思考、思考的數學課程——學生解答應用題，學的是甚麼？

林敏恆先生（教育局 小學校本課程發展組）

王偉玲老師、李麗霜老師、鍾紫靈老師（方樹福堂基金方樹泉小學）

陳玉英副校長、董麗紅老師、陳玉華老師、黃軟霞老師（保良局西區婦女福利會馮李佩瑤小學）

現行小學數學科課程的學習內容共分為五個學習範疇，依據學生的認知發展，將相關的內容編組成不同年級的學習單位，每個單位的內容又細分為多個學習重點。大部分的學習單位都會給學生帶來新的概念、新的計算方法或一些深化計算的技巧。學習重點以學生需要學習的數學知識內容和技能作具體描述為主，較少提及如何發展學生思考能力或學生該學會哪些思考方法和步驟。

以 3N2 加與減（四）、3N5 四則計算（一）和 4N6 四則計算（二）為例，三個單位均沒有引入新的概念或新的計算方法，除少量的計算法則（先處理括號內的運算，後「先乘除、後加減」）外，便是解答應用題，也就是要求學生學會運用已有的「數」範疇知識，進行練習。這些學習單位佔有相當的課時比重，到底學生解答應用題，學的是甚麼？

初小學生的學習歷程和表現

在未解答這個問題前，首先讓我們看看初小學生做應用題練習的歷程和表現。例一所顯示的，是一般初小學生在解應用題時最為關心的要點。也就是說，他們在審題時只需要看到這些「要點」，他們就能給出答案；甚或乎有些補習老師或家長，還會鼓勵學生把這些所謂「關鍵字」圈起來，以為這就是幫助學生「思考」和「解題」的良策。但這種「方法」真能有助學生思考和解題嗎？這實在是值得我們深思和探討的問題。

例一：

題一：（一年級）

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ 28 粒，◆◆◆◆◆ 7 ◆◆◆◆◆，共有◆◆◆粒？

學生列寫橫式： $28 + 7 = 35$

給出答案：35 粒

題二：（一年級）

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ 28 粒，◆◆◆◆◆ 7 ◆◆◆◆◆，還餘◆◆◆粒？

學生列寫橫式： $28 - 7 = 21$

給出答案：21 粒

題三：（一年級）

◆◆◆◆◆◆◆◆ 28 粒，◆◆◆◆◆ 7 ◆◆◆◆◆，◆ 比◆◆◆◆粒？

學生列寫橫式： $28 - 7 = 21$

給出答案：21 粒

題四：（二年級 乘法練習）

◆◆◆◆◆◆◆◆ 28 粒，◆◆◆◆◆ 7 ◆◆◆◆◆，共有◆◆◆粒？

學生列寫橫式： $28 \times 7 = 196$

給出答案：196 粒

題五：（二年級）

◆◆◆◆◆◆◆◆ 28 粒，◆◆◆◆◆ 7 ◆◆◆◆◆，每◆◆◆◆粒？

學生列寫橫式： $28 \div 7 = 4$

給出答案：4 粒

題六：（二年級 除法練習）

◆◆◆◆◆◆◆◆ 28 粒，◆◆◆◆◆ 7 ◆◆◆◆◆，◆◆◆◆◆包？

學生列寫橫式： $28 \div 7 = 4$

給出答案：4 包

從另一個角度看，這些例子正好說明，學生列寫正確橫式跟他們是否掌握問題情景或了解問題焦點並沒有必然的關係。究竟學生的答案是思考應用題的成果，還是他們純粹把問題看作算式題計算？老師真的難下判斷。

沿用既有的教程和教學模式，學生在初小階段進行了這麼樣的應用題練習，與其總結學生學會了甚麼，倒不如審視一下，他們到底養成了怎麼樣的思考態度和習慣。以下是老師從觀察得來的一些推想：

- 相當部分的學生把關鍵字和運算作一一配對，或是以表面印象做模糊判斷，把問題看作不同運算的分類處理。如：題中出現「比」字，即進行減法；看見「每」字，又以除法計算，對字裡行間表述的數量關係沒有作出細緻辨析。
- 只追逐快速計算，不理會情景細節。事實上，那些文字沒有在學生的腦袋裡停留多久。
- 普遍學生沒有領悟思考需要時間、步驟和方法。

三年級的課程要求

當學生進入三年級，他們所遇到的問題已不再是以一步運算可以解答。他們要面對的是處理多數量和包含有複合步驟的問題，需要作出分析、選擇或判斷，嘗試混合加、減、乘和不同組合的括號組織解答方案（即列寫適當的橫式）。單憑配對關鍵字作運算的技能再也幫不上，最起碼的要求是看懂描述情景的文字，讓情景資料停留在腦袋多一陣子，他們更需要的是認真學會思考。

綜合 3N2 和 3N5 的課程內容，學生需要學會處理三個數，運用加、減、乘和合適的括號進行二步運算解題。可是 3 個數結合兩個運算和不同組合的括號，能變化出超愈十數的不同算式（參看附件一）。再者，同一的算式又可來自多種多樣的情景問題（參看附件二）。因此，每一道題都會變化多樣的，老師分門別類地逐一教授，學習效果既不理想又不容易。況且課程的要求，基本上就是要學生學會靈活變通，故此，編排一個具系統的思考教學教程是一個適切的選擇。

學生如何從變化多樣的應用題中，確立適用的算式？

打個譬喻，設想我們的任務是要找回埋藏在地下的物件。那麼，當知悉埋藏地點所在，剩下來的的工作就是選用合適的工具和方法，把物件挖掘出來。但若然我們只知道物件是藏在山丘上的某處，而未能確切地知悉它的所在位置，即使懂得挖掘的方法和擁有合適的工具，挖掘工作也是沒法開展的。

因此，我們首要的工作是探索物件可能埋藏的地點。而這項探索工作需要細心考察，在山丘附近的範圍內收集和整理資料，透過分析及推敲以確定埋藏地點。明顯地，前期的探索與後期的挖掘工作在本質上很不一樣。

把這個譬喻套入學生解答應用題的情況，知悉埋藏地點就好比確定了相應的算式（橫式），只要耐心計算準確，問題隨之解答。相反，若學生還未能確立算式，縱使計算快速準確，對解答問題仍是毫無幫助。因此，解應用題最關鍵的就是要學會「探索」，細心讀題，整理數字資料，並且分析題中的數字關係，耐心地進行這樣的兩個步驟，對準要求的橫式才能穩妥確立。

過往，當學生不懂解答或列寫了錯誤的橫式，老師會給學生展示完整方案並作出解說。但方案是如何想出來？為甚麼老師會選擇這個做法？卻少有具體談論。從不同角度去看，老師熟悉相關的課題知識，用「已知」和熟悉的角度去選擇最合適的方案，並以精簡方式解答問題，這似乎是很理所當然的；但對比之下，學生從「未知」或仍在初學階段的背景下，面對著老師給出的答案，只能「知其然而不知其所以然」，勉勉強強的明白答案中每句每式的合理性，卻不能看

通如何開展解難的第一步。他們到底需要經歷哪些步驟來進行探索？他們卻不得而知。更遑論怎樣選擇需要應用到的數學知識（工具）了！

如何把解難思考融入四則計算應用題？學習的內容是甚麼？

綜合以上的想法，老師教授四則計算應用題的任務是指導學生學會在一段載有數字的文字情景中，撮取數據，透過認清每個數字所代表的意思來整理資料，再而分析各個數字之間的數學關係，最後掌握問題的要求或認清問句的焦點，列寫算式作為解答方案。因此，這些課程單位的重點應是思考教學，幫助學生學習思考，當中包括認識思考和正確的思考態度；以及學習思考步驟、工具和方法。

認識思考

學生需要明白思考不是猜測，也不是模糊判斷。在一般的情況下，答案或解答方案是不會瞬間閃現。他們更要明白思考是一個過程，需要耐心和時間進行具體步驟，才能推算出合理的答案。還有，在思考的過程中，我們會用上一些工具和方法，如列表和繪圖等。

思考步驟、工具和方法

學生需要掌握解應用題的五個步驟：審題、分析、列寫橫式、計算/演算和表述答案；也就是在寫下橫式前明確地加入審題和圖示分析等步驟。

- 審題 — 學生需要細心閱讀問題，理解情景中的事物和數量，撮取數字資料，並且學會把它們整理成一個簡要的資料表；
- 圖示分析 — 學生透過辨析每個數字的含義和考量焦點問句的要求，嘗試把數量與數量之間的關係形象化地展示出來。

雖然思考教程的重要部分在三年級進行，但學生需要運用的思考工具則已在二年級「數」範疇教學中引入，普遍地三年級學生已初步掌握竅門，大致能選擇合適圖像展示數量與數量之間的關係。他們學會的圖示包括：

- 表示比較數量的比較線段圖或比較圖
- 用以展示總數與部分的組合屋或總計樹圖
- 描述增減、輸出和輸入的出入圖；和
- 乘除關係圖

總的而言，校本課程的目的是讓學生認知到分析思考是一套可以學習到的步驟和方法，期望他們能養成良好的思考習慣：每遇問題，先逐句閱讀、寫寫畫

畫（審題、分析），才嘗試列寫橫式。也就是戒除那些不去細心思考題目內容，只顧急著走進計算的陋習。

思考技巧的改善與提升

要讓孩子學習有條理地思考，掌握「解難步驟」和「思考方法」的認知層面，只能算是實踐思考訓練的熱身動作。然而，把學會了的「解難步驟」和「思考方法」進行練習，才是實踐思考訓練的第一步。透過解答多變式的文字應用題，到底學生是如何改善自己的思考方法？如何從不同的練習中提升思考能力呢？

台灣學者張玉成在其著作《思考技巧與教學》一書中，臚列了中外學者對思考所下的不同定義，他綜合歸納各家的立論，對思考提出以下的定義：「思考是個體運用智力以現有知識經驗為經，眼前資訊為緯，從事問題解決或新知探究的過程。」（張玉成，1993，頁8）也就是說，學生思考應用題時，他會嘗試運用已有知識，同時需要掌握題中的數字資料，回憶過往做題的經驗，進行區辨、分析和判斷等心智活動，而整個活動又是一個過程。我們的應用題教程所聚焦的正好配對張玉成所歸類劃分的問題解決策略。

思考在一般的情況下是一種比較隱藏的心智活動。而教授學生解答應用題時，老師能有效指導學生思考的關鍵，在於能否掌握學生對問題的認識程度。所以教程的一個設計重點是：發展圖像思考工具，讓學生把腦子裡對問題的理解和認識，借助圖像呈現出來。只有當看到學生審題和分析思考路徑的具體展示，老師才能沿着學生的思路在恰當的地方給予回饋、指導和建議。一般學生較難套入老師的「外來」思考模式，對比之下，若學生看到老師在自己原有的思考路徑中，指出自己思考上的要點或繆誤，學生會更容易理解和作出改善，思考學習的效果才能真正達至。

另一方面，雖然多做應用題練習可使思考技巧變得熟練；然而，若要優化和提升思考能力，則需要多一點外來的刺激。譬如參考其他同學的做法，並跟自己的做法進行比對，然後作出**擇優判斷**，把好的想法融入自己的經驗和思考模式，把不好的，從自己的思考陋習中剔除，多作這種隱藏的心智活動，個體的思考能力自然會慢慢地得到提升。

電子學習的配合

現時學校的無線網絡裝備、平板電腦和相關的應用軟件為師生提供了一個實時互動的學與教平台；而「思考教學」的課程重點，恰好就是在於邀請學生透過圖像展示思考，與老師和同儕互動交流。「電子學習」平台正好為師生、生生之間的訊息交換提供便利。故此，我們所設計的應用題「思考教學」教程，部份課節以電子學習的模式進行。雖然，傳統課堂也可以進行互動教學，但與

在電子平台上進行的效果比較，傳統課堂中的互動量，以及為學生的思考所帶來的刺激量，卻是遠未及電子學習平台的效果。

經過課堂觀察，我們不難發現：電子學習起了「量變帶來質變」的效果！為何這樣說呢？「量變」泛指師生之間互聯訊息交流的數量、速度和頻次。電子學習的課堂中，藉著平台的同步效果，每個學生的思考圖像均能同時展現在教師的桌面電腦上，讓老師在短時間內沒有遺漏地檢視每一個學生的習作，並能有效地揀選合適的樣本，適時給予回饋。而「質變」指的是回饋的素質。無論是學生對概念的誤解、一些常見或普遍的錯誤、精簡的解答，又或是一些另類的解答方案，老師都能在同一版面專注細讀，從而有效掌握不同學生的疑點或難點，給出準繩的回饋和建議。不像傳統課堂中，因學生即時性的回應，容易遺漏或是未能同步捕捉一些值得與學生作進一步談論的例子，因而錯過了值得與學生探討的點子，甚或是讓學生損失了很多判斷、優化和提升思考的機會。

從學生的角度看，借助電子平台提供的環境，學生能廣泛地參考同學的不同思考模式和做法，有助學生跳出個人的思考框框，踏出原始的思考起步點，作出變化改良，提升技巧和能力。同樣，由於展示的頻次多了，每個學生的習作均會在課堂上或多或少地展示給全班同學，並獲得老師的提點或讚賞，因而加強了學生的學習動機和擁有感，大大增益課堂成效。

結語

跟數學老師傾談學與教的對話中，經常提及到的是：「五年級學生處理應用題時，總是不去看清文字情景和問題焦點，只顧急著寫下橫式，走進計算，希望盡快交出答案。」這情況是數學老師普遍會遇到的難題。

另一方面，教科書普遍地會把應用題編排在每個計算重點之後，譬如：學會減法之後，跟著就是減法應用題練習；學會除法之後，就會是除法應用題練習。老師依循這樣的教程，不但忽略了引起學生的解題動機，甚至無法聚焦教授題型結構或分析數量關係等解題策略。

要改變這個狀況，我們有必要對**數學課程**的編排進行**思考**。兩所學校的老師經歷了兩個學年在思考教學（應用題）的教程設計及試驗工作，對教授應用題有了新的體驗。學生方面，當進入三年級學習時，學生普遍已能掌握基本技巧，學會以列表撮要資料和利用圖像展示問題中的數量關係。同時，大部分學生養成了解答問題的好習慣——按步驟細心閱讀，寫寫畫畫，才列寫橫式。這兩年的經驗，亦讓兩校的老師對學生進入高小階段學好數學增強了信心。他們預期

學生進入下一學習階段時，教師將可專注數學新知識的教授，而毋須再為學生的思考技巧、態度和解題習慣花費大量時間和精力。

誠然，發展一個教授**思考的數學課程**，使學生的學習難點或盲點得以解破和處理，確是一件不輕易也不簡單的工作。愛德華·波諾在《教孩子思考 *Teach Your Child How to Think*》(De Bono, 1993) 談及思考的本質時，以自行車比喻思考。他認為自行車是人類的一項卓越發明，一個人只需用上自己的肌肉和體格，付出同樣的氣力，自行車便能夠讓我們跑得更快、更遠。他又提到同一班學生固然有些跑在前列，有些跟在中游，也有些落後一點的。但如果都給他們設計一輛「思考自行車」做點訓練，就是毋需多加氣力，他們每一個都能走快一些、遠一些。各位老師，你會嘗試給學生設計一輛「思考自行車」——一個思考的數學課程嗎？學會了一點思考方法和技巧，也許會讓他們學數學學得更穩健、更深入呢！

參考資料：

1. De Bono, E. (1993). *Teach Your Child How to Think*. London: Penguin.
2. 香港課程發展議會 (2000)。《數學教育學習領域課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。
3. 張玉成 (1993)。《思考技巧與教學》。台北：心理出版社。

附件\一

混合加、減、乘和小括號二步運算的不同算式：

(1)	+	+	$(a + b) + c$	$a + (b + c)$
(2)	+	-	$(a + b) - c$	$a + (b - c)$
(3)	-	+	$(a - b) + c$	$a - (b + c)$
(4)	-	-	$(a - b) - c$	$a - (b - c)$
(5)	+	x	$(a + b) \times c$	$a + b \times c$
(6)	-	x	$(a - b) \times c$	$a - b \times c$
(7)	x	+	$a \times b + c$	$a \times (b + c)$
(8)	x	-	$a \times b - c$	$a \times (b - c)$
(9)	x	x	$(a \times b) \times c$	$a \times (b \times c)$

附件\二

同是以連加算式作答，應用題的文字情境仍會有以下的變化：

題一：甲有 200 元，乙有 300 元，丙有 100 元，3 人共有多少？

解答： $200+300+100 = 600$ 元

題二：甲有 200 元，乙比甲多 300 元，2 人共有多少？

解答： $200+(200+300) = 700$ 元

題三：甲的日薪有 800 元，補時薪金 100 元，乙的日薪有 700 元，2 人合共取得薪金多少？

解答： $(800+100)+700 = 1600$ 元

題四：甲購物用去 200 元，交通費用去 100 元，還餘 300 元，甲原有款項多少？

解答： $(200+100)+300 = 600$ 元