

## 非華語學生學習異分母分數加、減法

陳鋼博士（教育局 小學校本課程發展組）

劉小鳳老師、冼栢慧老師（伊斯蘭鮑伯濤紀念小學）

小學數學課程指引（香港課程發展議會，2000）中，有不少內容是關於分數的概念、計算方法和應用，可見分數是小學數學一個重要的課題。學生要學好分數，除了要明白分數的意義，也要掌握計算程序。在學習異分母加減法時，複雜的計算步驟，往往難倒不少學生。

伊斯蘭鮑伯濤紀念小學辦學廿載，教師努力不懈，以照顧非華語生學習為主。學生主要學習語言是英文，他們學習分數，除了要理解分數概念和掌握計算技巧，還要克服語言困難。本環節會探討非華語學生學習異分母分數加、減法所遇到的困難，並講述學校老師怎樣幫助學生學習，減輕他們的運算負擔，令學習較為有成效。

### 學生學習異分母分數加減法的重點

學習異分母分數加減法，涉及理解概念、掌握運算程序和解應用題三方面，現簡述如下。

#### (一)通分的概念

老師問學生  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  是多少，有學生會誤以為是  $\frac{2}{5}$ ，這些學生忽略了通分的原理，兩分數應分成相等的部分，方能進行加減運算。由此，帶出了計算分數加減

法，需要先把兩分數擴分至分母相同，才可比較兩數大小，或進行加減運算。

## (二)計算涉及多個步驟

計算異分母分數的加法，一般如下計算。

$$\begin{aligned} & 1\frac{9}{10} + 3\frac{1}{4} \\ &= 1\frac{18}{20} + 3\frac{5}{20} && \text{(例一)} \\ &= 4\frac{23}{20} \\ &= 5\frac{3}{20} \end{aligned}$$

如例一所示，計算過程涉及的技巧，包括用最小公倍數通分、同分母分數加法和假分數化帶分數；有些計算題，還需要把答案約至最簡。

當計算涉及三個分數的加減時，則更加困難。

$$\begin{aligned} & 1\frac{9}{10} + 3\frac{1}{4} - 2\frac{2}{5} \\ &= 1\frac{18}{20} + 3\frac{5}{20} - 2\frac{8}{20} && \text{(例二)} \\ &= 2\frac{15}{20} \\ &= 2\frac{3}{4} \end{aligned}$$

例二雖然只有三步運算，但要找出三個分母 10、4 和 5 的最小公倍數，實在不容易，學生基礎不穩，便容易算錯。

## (三)解應用題

學生若能理解題目意思，解分數加減應用題，與解一般自然數的加減應用題相似。

不過，學生對涉及分數的情境，始終較為陌生，例如把  $2\frac{1}{2}$  升水和  $1\frac{2}{3}$  升濃縮果汁混合，共有果汁多少升？比起混合 2 升水和 1 升濃縮果汁的問題，學生較難想像前者涉及分數問題的結果。

除審題外，分數計算的步驟複雜，需要頗長時間，解多道應用題，便花不少時間，影響學生的學習動機。

## 學習策略

支援人員和學校教師商討策略，幫助學生學習。由於學生可能遺忘了四年級分數的知識，而且他們的計算能力稍遜，我們認為教學過程應著眼於先重溫已有知識，讓學生有好的基礎學習新知識，然後教授較簡單的分數計算方法，目的是減輕學生的記憶負擔。學校推行的學習策略如下。

## 重溫

為確保學生有穩健的基礎，教師仔細分析同分母加減的教學步驟，設計校本課業，幫助學生重溫四年級分數的基本計算技巧，當中包括以下幾項：

- 分數的意義
- 複習 2、3 和 5 的整除性
- 擴分和約分
- 帶分數和假分數的互化

## ● 同分母分數的加減運算

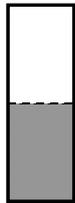
重溫後，學生基礎較穩，容易學習新知識。

### 建立概念

計算異分母分數加減的重要一步，是把兩分數通分。若只用算式解釋這步驟，學生可能只明白計算的程序，而不理解程序背後的數學原理。在本年的教學，教師用了分數卡的圖示，向學生解釋異分母分數相加前，為何要通分。舉例，教師指出圖一和圖二分別代表分數  $\frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{2}$ ，然後要求學生想想兩數相加的結果，有學生能說出，把  $\frac{1}{2}$  看成  $\frac{2}{4}$ ，便得出兩數相加的答案是  $\frac{3}{4}$ 。由此，教師指出了通分的重要。



圖一



圖二

### 掌握計算技巧

學習概念後，便要掌握計算技巧。支援人員相信，學生學習分數加減，最難掌握的是計算技巧。

#### (一) 通分

回顧例一，學生計算  $1\frac{9}{10} + 3\frac{1}{4}$ ，要先通分，而教師一般會教授學生以兩分母的最小公倍數通分，學生可能採用以下兩個方法的其中一個：

方法一：列舉法

方法一：列舉法

學生在四年級時曾學習用列舉法求最小公倍數。求 4 和 10 的最小公倍數，會先列出 4 的倍數，再列出 10 的倍數，找出兩數第一個相同的倍數，便是答案。詳細步驟如下：

4 的倍數：4、8、12、16、20、24 ……

10 的倍數：10、20、30 ……

4 和 10 的最小公倍數是 20。

這方法的概念簡單，學生容易明白。但由於步驟較多，學生較容易出錯。此外，找出最小公倍數只是解題的第一個步驟，學生還要計算同分母分數加法，才能完成此題。由於計算步驟繁複，做一道題，可能已令學生懼怕，影響學習動機。

方法二：短除法

另一個方法，是用短除法求最小公倍數，舉例如下：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 \quad 10 \\ \hline & 2 \quad 5 \end{array}$$

4 和 10 的最小公倍數 =  $2 \times 2 \times 5 = 20$

這方法的好處，是步驟較少；缺點則是計算的原理複雜，學生很難明白，只能強記計算程序。時間久了，便容易忘掉。

那麼，對於基礎較弱的學生，什麼方法較合適呢？

其實要計算異分母分數的加減，只要擴分，令兩數分母相同，便能進行加減運算。

故此，在本年的教學中，教師捨棄了列舉法和短除法，只要求學生將兩分母互乘

通分便可。例如，計算  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$  的步驟為：

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1 \times 6}{4 \times 6} + \frac{1 \times 4}{6 \times 4} = \frac{6}{24} + \frac{4}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

以往學生用列舉法和短除，往往要很長時間，才完成通分，甚至在這步便停了下來。本學年學生學習以兩分母相乘的方法通分，覺得較為容易，當學生相信自己能掌握時，便願意進行通分和繼續計算。

另外，教師節省了重溫列舉法或教授短除法的課時，可用更多課時和學生做練習，令學生掌握好兩分母相乘的通分方法。

這方法的缺點，是找出答案前，要多做約簡的步驟。學生數感弱，可能找不到分子和分母合適的公因數約簡，或約簡時計算錯誤。但無論如何，學生只是運用已有知識解題，並反覆練習基礎運算，計算比起用列舉法或短除法準確。

上述計算的另一重點，是建議學生寫下步驟  $\frac{1 \times 6}{4 \times 6} + \frac{1 \times 4}{6 \times 4}$ 。對於計算能力較強的學生，往往會省下這步。但對計算能力弱的學生來說，這做法能幫助他們明瞭整個運算過程。以上式為例，擴第一個分數的數字 6，是第二個分數的分母；擴第二個分數的數字 4，是第一個分數的分母。學生清清楚楚寫下每一步，便能省下記憶負擔，減少運算錯誤。

就算兩分母有倍數關係，也可用分母相乘的方法通分。雖然如此，但也有學生觀察得兩個分母的特殊關係，便會用較簡便的方法通分，教師也容許學生這樣做，

例如：

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1 \times 2}{4 \times 2} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

計算涉及三個分數相加減的問題時，又如何處理呢？若能找出三個分母的最小公倍數，計算起來固然快捷，但是求三數的公倍數很難，教師寧願學生慢慢來，由左至右按次序計算首兩數的和或差，再計算其結果和第三個數的和或差，現舉例供讀者比較。

方法一：同時把三個分母以最小公倍數通分

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{6}{12} + \frac{8}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

方法二：每次計算兩個分數的加或減

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{6} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{7 \times 4}{6 \times 4} - \frac{1 \times 6}{4 \times 6} \\ &= \frac{28}{24} - \frac{6}{24} \\ &= \frac{22}{24} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

方法一看似簡單，但學生是如何通分的呢？無論是列舉法或短除法，學生都要在草稿紙上另作計算，可能求得分母 12，以列舉法為例：

2 的倍數：2、4、6、8、10、12、14 ……

3 的倍數：3、6、9、12、15 ……

4 的倍數：4、8、12、16 ……

2、3 和 4 的最小公倍數是 12。

由第一個算式到第二個算式，學生其實還要完成以下的心算：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1 \times 6}{2 \times 6} + \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3} \\ &= \frac{6}{12} + \frac{8}{12} - \frac{3}{12} \end{aligned}$$

計算能力較弱的學生，不明白算式中的數字 6、4 和 3，是如何得來的。學生一來不懂得運算原理，二來計算過程複雜，便容易出錯。

方法二的計算步驟較多，也要多做約簡，但有兩個好處。第一，學生能掌握每個計算步驟，清楚了解計算程序。第二，學生可反覆運用已有知識解題，不需學習如何求三個數的最小公倍數，因而減輕了記憶負擔。

## (二) 分數直式

計算分數加減，通分後需要做同分母計算。常用計算方法如下：

$$\begin{aligned} & 5\frac{2}{4} - 1\frac{1}{4} \\ &= (5-1) + \left( \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= 3\frac{1}{4} \end{aligned}$$

在第二列算式，出現了一個加號和兩個減號。不明就裏的學生，會混淆運算符號。

如果問題是  $5\frac{2}{4} - 1\frac{3}{4}$ ，學生或會把算式寫成  $(5-1) + \left( \frac{2}{4} - \frac{3}{4} \right)$ ，到發現要退位時，便需重新計算。這些都是學生可能會犯的錯誤。

在備課中，我們決定教授學生用直式輔助計算，以解決他們在同分母分數加減法上遇到的問題。分數直式的方法，在外國的教科書已有記載（Tussy, Gustafson, & Koenig, 2010），也有本地學者撰文記述直式的好處（馮振業、黃彩霞、楊詠詩，

2014)。現舉兩例，講述分數直式，如何幫助學生計算退位減法。

例一：

$$\begin{array}{r} 3 \frac{1}{5} \\ - 1 \frac{4}{5} \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 2 \frac{6}{5} \\ \cancel{1 \frac{1}{5}} \\ - 1 \frac{4}{5} \\ \hline 1 \frac{2}{5} \end{array}$$

例二：

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 3 \frac{1}{4} \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 5 \frac{4}{4} \\ \cancel{6} \\ - 1 \frac{3}{4} \\ \hline 4 \frac{1}{4} \end{array}$$

運用分數直式，學生較容易記得退位的計算程序，減少了錯誤。有興趣詳細了解分數直式的讀者，可參閱馮振業等人（2014）一文。

## 應用題

教授應用題，重點是希望學生用心審題。在教學策略上，教師一方面會教授重點字詞的意思，協助學生容易解題；另一方面會減輕學生計算負擔，讓學生專心審

題。

在教授重點字詞方面，教師提醒學生要理解字詞的意思，如 **left** 不一定是「左方」，而是「還餘」，**together** 代表共有多少。另外，學生覺得解應用題已很費神，列好算式後，還要計算，覺得做應用題很不容易。因此，教授應用題時，教師只要求學生專心審題和列式，讀了一道題，列好算式後，便讀下一題和列算式。由此，學生減輕了心理負擔，有興趣解題，提升了學習表現（Heinze, Reiss, & Franziska, 2005）。教師也認為，這樣學生能專心審題，學習比以往用心。

## 總結

教師仔細安排教學內容，細分步驟，先重溫小四同分母分數計算，教授較淺易的通分方法，幫助學生學習異分母分數的加減計算，最後運用審題的方法，幫助學生解應用題。整個教學編排是要鞏固學生的已有知識，讓學生反覆運用基本計算技巧，解決新問題，而不是多學習新知識。學生學得容易，覺得自己有能力應付計算題和應用題，便樂於嘗試解題。

以往，學生做好一道分數加減題目，看到下一題，好像剛走過一座高山，又要去攀另一座高山。望著每道題，都是一個艱難的任務，很想老師幫忙。如今，學生掌握計算方法，信心較強，學習動機較高，願意計算和解題。

在分享會上，伊斯蘭鮑伯濤紀念小學的老師會向與會者詳細解釋教學的過程，期

望為大家帶來新的角度，了解另一套教授異分母分數加減的方法。

#### 參考資料

1. Heinze, A., Reiss, K., & Franziska, R. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 37, 212 - 220. doi:10.1007/s11858-005-0011-7
2. Tussy, A., Gutstafson, R., & Koenig D. (2010). *Basic Mathematics for College Students, 4th ed.* Belmont, CA: Brooks Cole.
3. 香港課程發展議會 (2000)。《數學課程指引(小一至小六)》。香港：政府印務局。
4. 馮振業、黃彩霞、楊詠詩 (2014)。〈分數直式〉。《數學教育》，37，頁 25 – 40。