透過開放式教學提升學生的思維能力 — 小四及小五「周界」和「面積」

曾倫尊博士（教育局 小學校本課程發展組）
潘靄玲老師、關惠珠老師、梁莉銘老師、鄧翠雯老師、黃佩儀老師、蘇敏婷老師、林嘉彤老師、唐司洛老師、尹志偉老師（嘉諾撒聖家學校）

引言

當今各國數學教育工作者極力提倡加強學生的思維訓練，希望透過老師日常的課堂教學提升學生的高階思維能力，然而大部分老師認為只要學生能完成各種不同程度的難題，便能加強學生的思維能力，卻忽略了提升學生理解基礎概念時的層次。課堂上，學生能夠解答難度較高的問題，可能只是強記計算的步驟，並不真正明白當中的概念，更未必能應用於其他相似的難題。在考試後，老師常會埋怨同學未能成功解答卷內一些解答過的習題，可想而知同學在課堂上不是真正明白解難的原理。學生思維能力的建立，其實建基於對概念的掌握，只要老師在引入數學概念時，適當地提升學生理解的層次，自然事半功倍。

開放式教學

開放式教學法利用開放式難題，鼓勵學生運用數學知識嘗試解題，並用多角度的思考來建構概念，而非傳統地追求單一的答案（Miwa, 1991）。學者們十分鼓勵老師嘗試進行開放式教學，提升學生對概念的理解層次，及促進學生靈活地思考。Boaler（1988）發現若老師有計畫地以開放性問題引導學生學習，學生對於數學概念的理解程度會較高，將來能夠解決難題的能力亦較強。Nohda（2000）亦提出開放式教學法應以開放式問題為中心，老師鼓勵同學積極地討論，讓學生自主地運用數學概念來解題。Vygotsky 更發現學生在小組內能透過討論，綜合同學的觀點，從而解決問題，過程中同學的討論提供了解決問題的鷹架 (Slavin, 2012)。另外 Kazemi（2008）強調老師不應在教學過程中，只討論正確的解題方法，而忽略其他錯誤的答案，應讓同學展示不同的或錯誤的解題方法，並鼓勵他們解釋其方法，讓其他同學理解其犯錯的原因，這樣才能深入澄清概念，藉此改變與重組學生的認知結構，提升他們的認知層次。美國全國數學教師協會曾提出「學生在課堂學習的經驗是主要影響數學概念理解層次的因素」 (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989)。因此 Schoenfeld (1991;1992) 強調：老師需要運用開放式教學，創造一個適合學生思考數學的環境，讓學生在解難的過程中，不斷思考數學。

校本發展經驗

嘉諾撒聖家學校的老師們希望學生在學習數學概念時，不僅能掌握基礎的概念，更希望同學能達到更高層次的理解。老師期望學生能以自己的言語詳盡地闡述概念，並懂得運用概念解決問題。老師們深入檢討，希望改變慣常輸入式的教學模式，從傳統著重演算，轉至重視理解與建構概念的教學取向，讓學生經歷多角度思考和發現規律的過程，教學時多提出開放性問題，鼓勵學生主動及投入地參與活動，促進同學間之互動情況。

在課堂提問方面，老師會延遲判斷學生答案的對或錯，鼓勵學生勇於回答沒有標準答案的問題，加強師生及學生之間的課堂互動。老師又會邀請全班回應或追問同學的解題方法，讓同學解釋理由，整理思緒，運用數學知識和技巧，將思考過程表達出來，以此開放教室裡的對話空間。老師期望能有效地帶領同學深入理解概念，提高理解的層次，從討論中浮現不同的想法，並澄清謬誤，弄清模糊的概念，令正確的數學概念能紮根於心中。

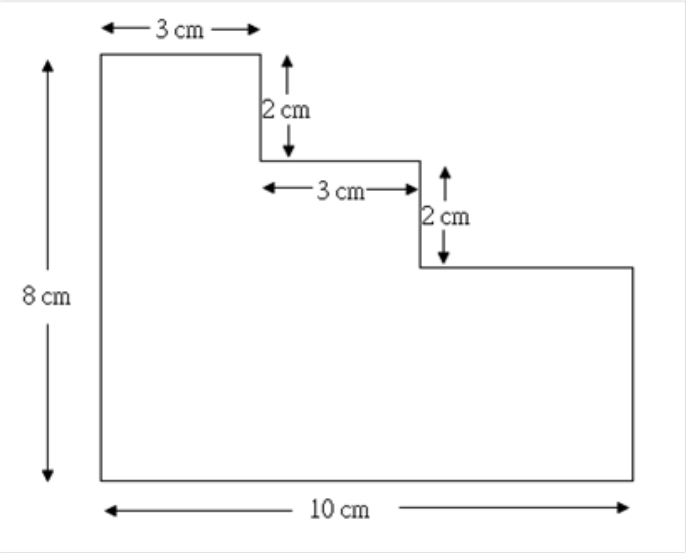
該校老師就小四及小五的「周界」及「面積」教學嘗試運用開放式教學法，悉心設計整個單元教學，特別着重學生對基礎概念的掌握及理解，採用由淺入深、循序漸進的課業，逐步加深理解，讓學生靈活運用概念解答老師設計的開放式難題。

基礎概念的掌握 —「垂直和平行」

在「周界」和「面積」中，學生需要自行找出對應邊的長度以解決問題，而學生往往未能運用「垂直和平行」中的概念，適當地找出對應邊長。老師於是加強小三學生對直角、垂直線和平行線的認識，好讓他們能運用所學以解決周界和面積的難題。在三年級「垂直和平行」單元，學生慣常以直觀判斷垂直和平行，對概念理解含糊不清，於是老師著學生運用三角尺檢測垂直和平行，並以平板電腦輔助教學，讓同學運用電子釘板的應用程式，學習如何在指定線段上繪畫垂直線，最後老師還進一步要求學生自主地探究繪畫垂直線的技巧，從而加強垂直和平行的概念。

「周界」的教學過程

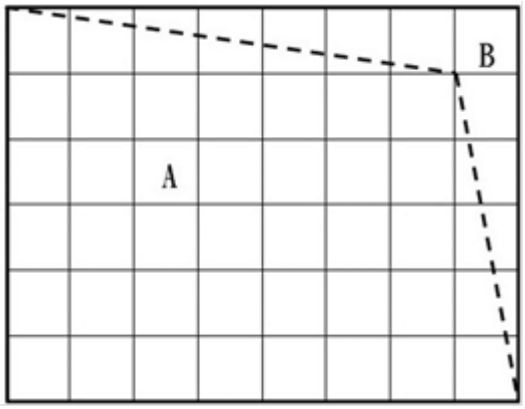
「周界」單元中，教師設計教學，讓學生探究計算周界的不同方法，以提高學生的思維能力。在探究計算不規則圖形的周界時，在一些圖形中(如下圖)，可運用平移推邊的方法，把圖形轉變成矩形，從而計算周界。老師希望同學能夠根據圖形的特點，自行運用移邊的方法把圖形轉變成矩形，以方便運用矩形周界的公式來計算。



在課堂中，老師運用平板電腦的電子軟件，讓同學透過合作學習，輪流具體地移動不規則閉合圖形的邊界，並發現移邊後的矩形周界和原來不規則的閉合圖形周界相同，從而得出計算不規則閉合圖形時，可將邊平移，變成矩形以方便計算。觀課所見，學生都非常投入探究活動，能夠輪流完成任務，又能互相監察提醒，各成員均勇於提出不同的探究結果，再加以有系統的整理，令活動的效能提升不少。堂末，老師特別出示呈凹字形的不規則閉合圖形，讓同學說出計算其周界的方法，同學都能準確地指出，其周界應包括推邊建立的矩形及在矩形內的兩邊。以往大多數同學都會遺忘了矩形內的兩條邊，現在同學的表現實在令老師驚喜。

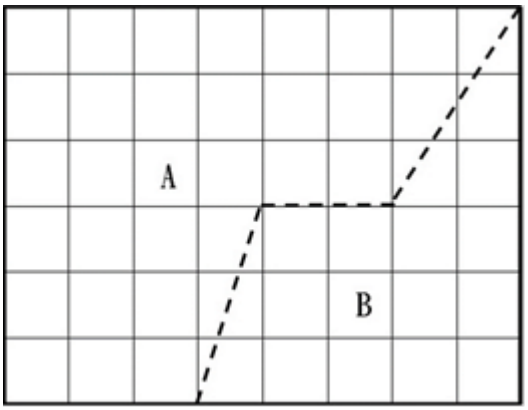
探究矩形內相鄰圖形的周界

在另一課堂，老師著學生探究周界和圖形大小的關係，同學需比較矩形內相鄰圖形的周界，如圖(一)，A 雖比 B 大，但它們的周界是相同的。



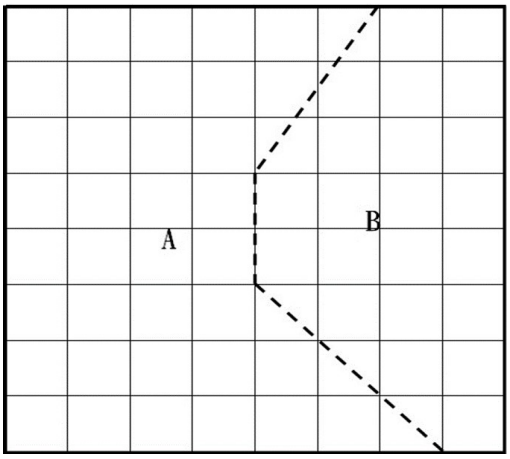
圖(一)

老師悉心地設計了一系列不同的圖形，希望帶領同學探究出矩形內相鄰圖形的周界長短，乃取決於共同邊的起點和終點位置，而不受其大小影響。如圖(二)和圖(一)比較，A 的周界比 B 長。



圖(二)

起初，同學大都受相鄰圖形的大小影響，將較大的圖形判斷為有較長的周界，需要老師運用平板電腦上 GeoGebra 軟件，將相鄰的兩圖形分拆開，讓同學發現兩圖形中間有相同長度的邊，從而得出結論。接下來，老師提出變易的題目，題目的中間線，不再由矩形的對角出發，而是在對邊的不同位置上，如圖(三)，讓學生探討這時矩形內相鄰的兩個圖形的周界會否相同。



圖(三)

課堂中，同學均議論紛紛，說出不同的答案，老師鼓勵同學以理據解釋自己的答案，同學都想出了不同的解釋方法。

整體而言，老師以開放性教學，讓學生通過討論及探究，總結答案，學生都能運用數學語言互相交流心得，更能將發現整理歸納，提升了概念的理解及思維能力。

「多邊形面積」的教學過程

在「多邊形面積」的教學過程中，老師在教授分割法、填補法及混合兩種方法計算不同難度的多邊形面積時，均引入開放式問題，以提升學生的思維能力。在重溫分割法的課堂，老師運用不同的四邊形圖形，如長方形、平行四邊形、正方形、三角形等其中兩個圖形，讓同學拼砌出不同的多邊形，再思考如何計算該多邊形的面積。在教學過程中老師都能開放學生的學習空間，讓同學運用多種不同的分割方法，計算多邊形的面積。觀課所見，課堂節奏明快，老師能掌握時間引導同學解決一些較難的題目，例如計算一個正五邊形的面積。

在另一課堂，老師教授學生運用不同的填補法計算多邊形面積。老師同樣地運用不同的四邊形，讓同學將較小的圖形貼在有顏色較大的四邊形上，再思考如何計算剩餘部分多邊形的面積。同學都能說出可將較大圖形的面積減去較小圖形的面積，效果理想。

老師亦希望同學能探究解答重疊圖形面積的方法，老師在上課前預先為學生準備好兩個圖形，學生需先計算這兩個圖形的面積。課堂上，老師運用實物，展示當兩個圖形部分覆蓋後，可能出現的面積變化，再着學生思考，如何找出覆蓋後之圖形面積。學生單憑直觀，便能迅速地得出指定圖形的面積，更能總結出計算的方法。最後，老師讓同學應用所學，解答更深的難題，同學們都積極投入活動，能運用不同的方法準確地計算。

在單元的鞏固和延伸部分，老師希望讓同學從計算不同層次難度的題目中，整理並歸納出選擇分割法或填補法的法則，以達至既快捷又準確的解題方法。老師更鼓勵同學自由設計難題，先將計算好的答案隱藏在圖形後面，再讓鄰座的同學計算，這樣同學在計算後可即時核對答案，提高即時回饋的效能。同學都希望設計出更創新的圖形，讓其他同學計算，課堂氣氛十分熱烈。

總結

在兩年支援期間，老師們嘗試採取不同的開放式問題，以提升學生的思維能力。老師從學生在課堂、課業及評估的表現，了解到學生對學習內容感興趣，她們能在課堂內彼此合作解決難題，探究面積和周界的各種關係，並把知識應用在各相關的應用題中。另外從學生的自我評估中，了解到學生明白學習內容，當她們遇到數學難題時，會嘗試尋求不同的方法去解決問題，在討論中亦能接受別人

的意見。老師們總結運用開放式問題教學應具有的特色，當中包括：重視學生思考的過程、對基礎概念的掌握、提升學生理解的層次、鼓勵學生運用不同的方法來討論解題，以及鼓勵學生運用多角度思考。教學的步驟以日常生活的問題作為開始，進而激發學生高層次的思考。

這次分享會中，老師就小四、五 「周界」和「面積」各課題的不同難點作出深入的探討，在教學中嘗試加強開放式教學，以貫通各級學習活動的設計，經過多次研課、觀課及不斷反思改良，累積了一些設計活動的經驗，希望透過分享會與其他老師交流。

參考文獻

1. Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education. 29*(1), 41-62.
2. Kazemi, E. (2008). Discourse that promotes conceptual understanding. In P. C. Elliott, & C. M. E. Garnet (Eds.), *Getting into the mathematics conversation：Valuing communication in mathematics classroom* (pp. 53-61). Reston, VA：National Council of Teachers of Mathematics.
3. Miwa, T. (1991). A comparative study on classroom practices of mathematical problem solving between Japan and the U.S.. In T. Miwa (ed.), *Report of the Japan-U.S. Collaborative Research on Mathematical Problem Solving*. Ibaraki: University of Tsukuba.
4. National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
5. Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. *Proceedings of the twenty-forth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 39-53. Hiroshima, University of Hiroshima.
6. Schoenfeld, A.H. (1991). On mathematics as sense-making. ln J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *lnformal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
7. Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371). New York, NY: Macmillan.
8. Slavin, R.E. (2012). *Educational psychology: Theory and practice*. New York, NY: Pearson.