一個量的兩種表述 — 小五分數教學

林敏恆先生（教育局 小學校本課程發展組）
楊秀銀老師、伍慧嫺老師（港澳信義會黃陳淑英紀念學校）

本文旨在分析概念性理解對學習解分數乘法應用題的影響。聽過很多數學老師這樣說：「『分數』是很多學生都學得不太理想的課題！」對數學老師而言，如果說分數教學難處理，教授分數乘法應用題更是個叫人感到氣餒的難關。很多老師縱使嘗試過從不同的方向去改善教學策略，但問題仍是未能得到明顯的改善。那麼，到底問題出在哪裏？解決這教學問題的關鍵又是甚麼？港澳信義會黃陳淑英紀念學校的老師也帶着這個難題，開展了以下的教程，嘗試從概念性理解入手，在課程和教學上同時作出較細緻的鋪墊，期望能幫助學生提升學習分數應用題的效能。

一個量的兩種表述

解答分數應用題不但涉及不同的計算程序和法則，當中的概念也容易讓學生出現混淆的情況，譬如說，「一袋米有 10 kg，吃去了 $\frac{2}{5}$」與「一袋米有 10 kg，吃去了 $\frac{2}{5}$ kg」，即使同樣是要求學生找出餘下的米有多少公斤，但計算方法，卻截然不同。也是因為這樣，往往令學生感到無所適從，令他們無法歸納出一種有效的解題方法。由於學生缺乏準確的數學詞彙或合適用語，每當學生感到困惑的時候，他們實在難以跟老師或同學作有效溝通，更說不上能整理出一個具條理的解題方案，以致他們對解分數應用題無法建立十足的信心。從教學的角度看，即使再思量多種多樣的方法去引導學生細心讀題，甚或是鼓勵他們使用思考圖作草擬分析，都是不得要領，未能針對問題的核心似的。按筆者的分析，關鍵也許在於老師能否在分數乘法的教學初期，刻意引入「一個項目下(一個量)的兩種表述」的概念性理解。扼要來說，就是老師讓學生知悉：每個數量均可以有兩種表述形式，即如上述的

「一袋米有 10 kg ，吃去了 $\frac{2}{5}$」，餘下米的重量可以具體地用「數值」(6 kg)表示，同樣也可以「比值」的形式 ($\frac{3}{5}$ 袋)表示。

校本課程調適及教學歷程

在分數乘法的教學進程中，我們補充了一些細緻的學習點作為鋪墊，譬如編排學習活動讓學生領悟和總結「分線與除號(÷)」的等價關係，以及學會求「某數量的部分」即計算「某數量 × (該部分的)分數」等。

在協助學生建立分數乘法的計算法則方面，老師先著學生以「平分後取回部分」的方法進行計算：

36 = 12 + 12 + 12，所以 36 的 $\frac{2}{3}$ 相等於 24；

$\frac{6}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}$ ，所以 $\frac{6}{7}$ 的 $\frac{2}{3}$ 相等於 $\frac{4}{7}$；

$\frac{5}{9} = \frac{5\times3}{9\times3} = \frac{15}{27} = \frac{5}{27} + \frac{5}{27} + \frac{5}{27}$ ，所以 $\frac{5}{9}$ 的 $\frac{2}{3}$ 相等於 $\frac{10}{27}$。

之後，再通過觀察及比對分數乘法中的兩個乘數和計算得來的積，讓學生歸納出分數乘法的計算法則，加深學生對相關法則的印象，並通過適量的習題鞏固學習，從而讓學生充分掌握分數乘法的計算。

當學生漸次熟悉分數乘法的式題計算以後，老師便帶領他們進入分數應用題的學習。在這個部分，我們再補充了兩個學習目標：

(一) 讓學生理解和掌握分數在不同的情景中會有「數值」或「比值」兩個完全不同的意義；
(二) 讓學生認識和掌握「數值」、「比值」和「參考數字」等多個概念詞組，使得他們能在課堂中運用，並藉以表述自己對有關應用題的理解和思考過程。

在課堂中老師先出示以下兩道題目讓學生觀察和思考 ：

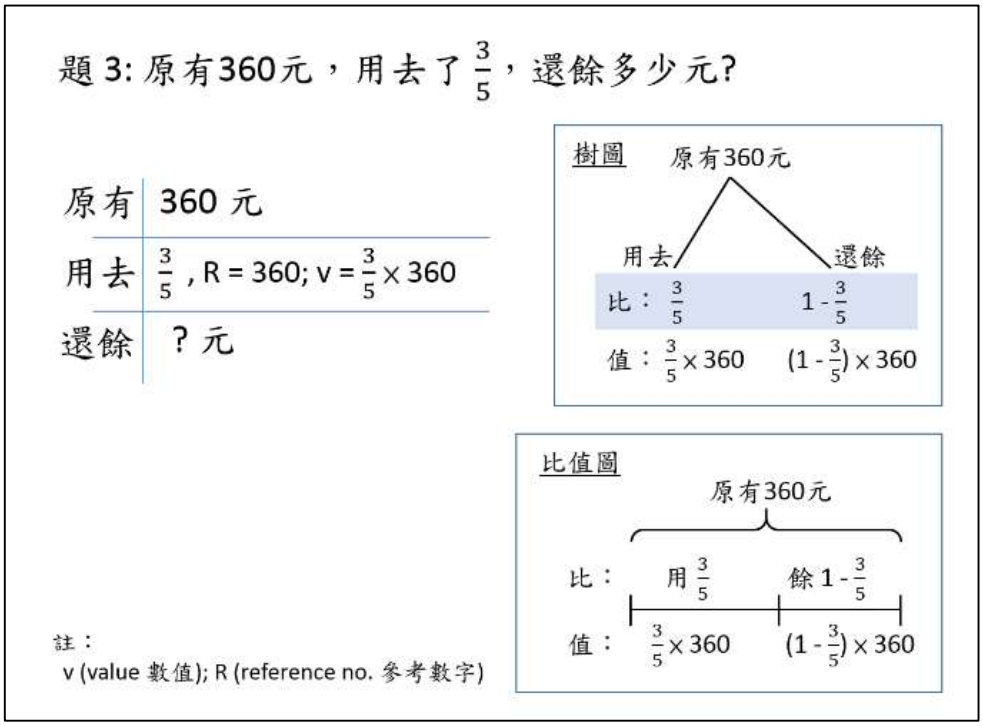
題 1：一袋米重 10 kg，吃去了 $\frac{2}{5}$ kg，還餘米多少 kg？

題 2：一袋米重 10 kg，吃去了 $\frac{2}{5}$，還餘米多少 kg？

經過約兩分鐘的短暫討論後，學生均能觀察到兩題中的「 $\frac{2}{5}$ 」有著帶單位 (kg) 和缺單位的差別，並且普遍意識到兩個「 $\frac{2}{5}$ 」分別表示著不同的意義。然而，他們卻未能準確表達出所意識到的差異。在這個時候，老師便首次帶出「數值」和「比值」的概念詞組，著學生進行第二輪的討論，示意學生適當地運用這兩個詞組來識別兩道應用題中的「 $\frac{2}{5}$ 」，以及分別解說理據。結果班中大部分學生能把「數值」和「比值」配對給合適的題目。個別學生更能具體細緻地道出：「我們認為『數值』是確實知道幾多的一個數，而『比值』是表示大數裡面的幾分之幾。因為第一個數跟「數值」的特徵相似，所以…」

由於課堂發展以及學生對兩個概念詞的接受程度較預期理想，老師於是放心解說兩個概念，並且總結學生的觀察：「數值」是伴隨著標準單位(kg)出現，而「比值」大多沒有單位。老師亦指出「比值」不會獨立存在，因為單獨存在的「比值」是不完整的，它必須參考另一個基準數字才能夠顯示完整意義，我們把這個數字定名為「參考數字」，例如題 2 中的 10 (kg) 是「比值 $\frac{2}{5}$ 」的「參考數字」。

接着，老師提供不同的應用題，讓學生開始運用「數值」、「比值」和「參考數字」等概念詞進行審題和初步分析。審題方面，學生沿用已學會的列寫資料表，摘要記錄題中有用的資料。在分數乘法課題下，老師加入了新的要求，當遇上「比值」分數時，學生需要在旁附上相對應的「參考數字」(或參考項目)。由於學生還在學習思考的初階，老師介紹了兩款「思考圖」（有關的資料表及思考圖見圖一），鼓勵學生一邊畫圖、一邊思考和分析。當學生對應用題有了深入的理解和分析後，要求他們列出正確的橫式便不是一件困難的事了。



圖一

解答高階應用題的關鍵

打穩了學生對基礎程度分數乘法應用題的認識後，教師便嘗試帶領學生分析較高階程度的題目了！老師出示以下的題目 ：

題 4： 家庭總收入有 60000 元，支出佔 $\frac{3}{4}$，餘下作儲蓄。住房租金佔支出的 $\frac{7}{12}$，問每月儲蓄了多少元? 房租是多少元?

算題中的兩個分數均表示著不同項目的「比值」 (分別是支出的比值和租金的比值)，而兩個「比值」卻對應著不同的「參考數字」。當中涉及參考之上再參考 (二重參考) 的問題，有學生即時表示感到困惑和繁亂，但卻說不出當中的細節原委。然而，學生的「繁亂」感受正好顯示他們意識到這道不是普通的單一「參考數字」應用題。老師藉着這樣的一道題，可以讓學生再次體驗辨析相應「參考數字」的重要性，同時也讓學生感受到說準確「數學語言」的好處。在過往，教授分數乘法沒有強調「數值」、「比值」和「參考數字」等概念，面對這類型的題目，老師著實找尋不到適切的平台跟學生討論，也就難以好好

地與學生作「準確」溝通。學生既不懂得如何解題，同時又難以向老師說出自己不理解的是甚麼。能力稍遜、能力中等以至部分能力良好的學生都給這類題目絆倒，往後再也難學好相關的課題了。

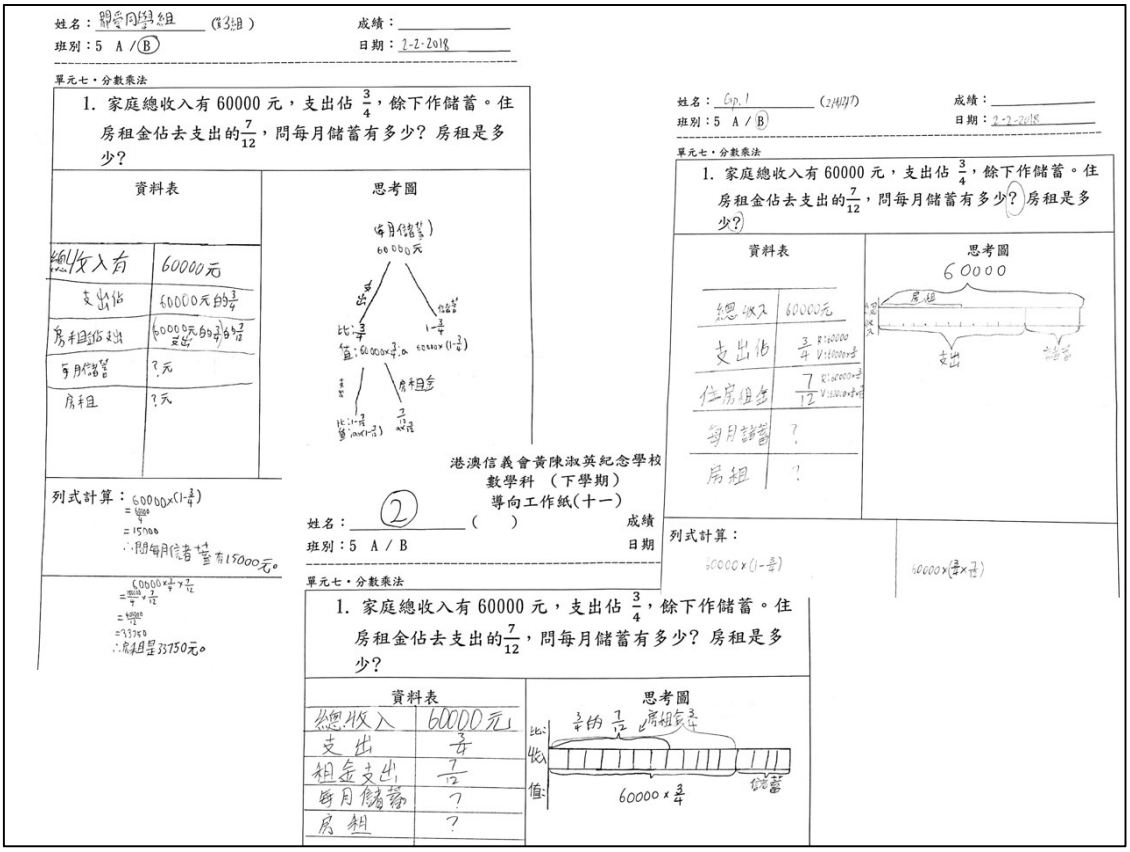
概念性理解(Conceptual understanding)**在學習歷程中的角色**

由於普遍的小學生對概念學習未有充分關注，他們遇到數字時會以數字的外觀特徵分類，也就是直觀地把題目中的數字分類為整數、分數或小數等，卻少有認清數字背後代表的意義並以概念分類，即如上文提及的「數值」、「比值」和「參考數字」。Gagné、C.W. Yekovich 與 F.R. Yekovich (岳修平 譯，1998) 綜合多個研究報告，提到愈來愈多的證據顯示，概念性理解對於認知處理歷程 (cognitive processing) 有多方面的影響，其中包括影響學習者會注意甚麼、會回憶甚麼，最終會是學習到甚麼，以及會如何解答問題等。布魯納 Bruner (1960) 亦明確指出，清楚認識基礎知識或概念將使得所學習的項目更容易理解，而透切理解基礎原則和理念是達至「學習遷移」的主要途徑。也就是當學生認識和掌握概念詞「數值」、「比值」和「參考數字」，他們便能把這些概念應用到理解相關的問題了。

思考工具與概念學習

整個校本課程設計是以加強概念學習，幫助學生準確理解分數應用題的數字資料和問題焦點。然而，概念學習不能單靠「講授」達至滿意效果，故此老師引入「思考圖」，給學生提供一個合適的草擬思考工具，透過寫寫畫畫去捕捉不同數量或數字之間的關係，分析問題。「思考圖」同時是一個表述工具，幫助學生把腦子裏的想法展現出來，成為「看得到的思考」，使得老師更能掌握學生的學習進展，進而在合適的地方給予適切的回饋，幫助學生修正思考方法，再而提升思考能力。具體的課堂實踐上，「思考圖」在解答分數乘法應用題中扮演着重要的角色，它能夠協助學生更具象化地分辨出 $\frac{3}{4}$ 的「參考數字」與 $\frac{7}{12}$ 的「參考數字」是不同的 (見圖二)；它也輔助了師生之間建立出適切的討論和溝通平台。觀課所見，無論學習能力高或低的學生都能

通過畫思考圖和互動討論去讓自己理解這類型的應用題，並且最終尋得解題方案。



圖二 學生在課堂上的分組作業

結語

透過這次課程調適及課堂實踐，港澳信義會黃陳淑英紀念學校的老師對分數應用題教學有了新的體驗。新體驗的主軸固然是引入概念詞加強學生對數字背後意義的敏感度，讓學生學會辨析題目中各個數字的屬性，概括相類問題的特有要求，從而更能清晰審閱題目的背景資料和問題焦點。教學過程中，大部分課堂以探究形式進行，老師持開放態度邀請學生歸納總結。其間亦上了一節「對話課」讓學生在輕鬆的環境把他們對有關概念(或許不完整、不成熟)的想法說出來(「聽

得到的思考」)。整個課研經驗使老師真正明白和體會到概念性理解(Conceptual understanding)在孩子學習數學的歷程中的重要性，同時顯明香港數學課程螺旋式編排對孩子學習的需要性，它更能突顯出「概念、知識點(學習點)和操作總結合」的課堂所產生的化學作用，為學生學習數學帶來吸引力和「魅力」。這也正正是「聽得到的思考」與「看得到的思考」一種恰到好處的結合性呈現！老師既體會到準確的數學語言對學生學習數學的重要性，同時也體會到學生通過畫思考圖將自己的思考過程展示的好處。

參考文獻

1. Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
2. Gagné, E.D., Yekovich, C.W., & Yekovich, F.R. (1998)。**教學心理學 — 學習的認知基礎**(岳修平 譯)。台北：遠流出版公司。(原著出版年：1993)