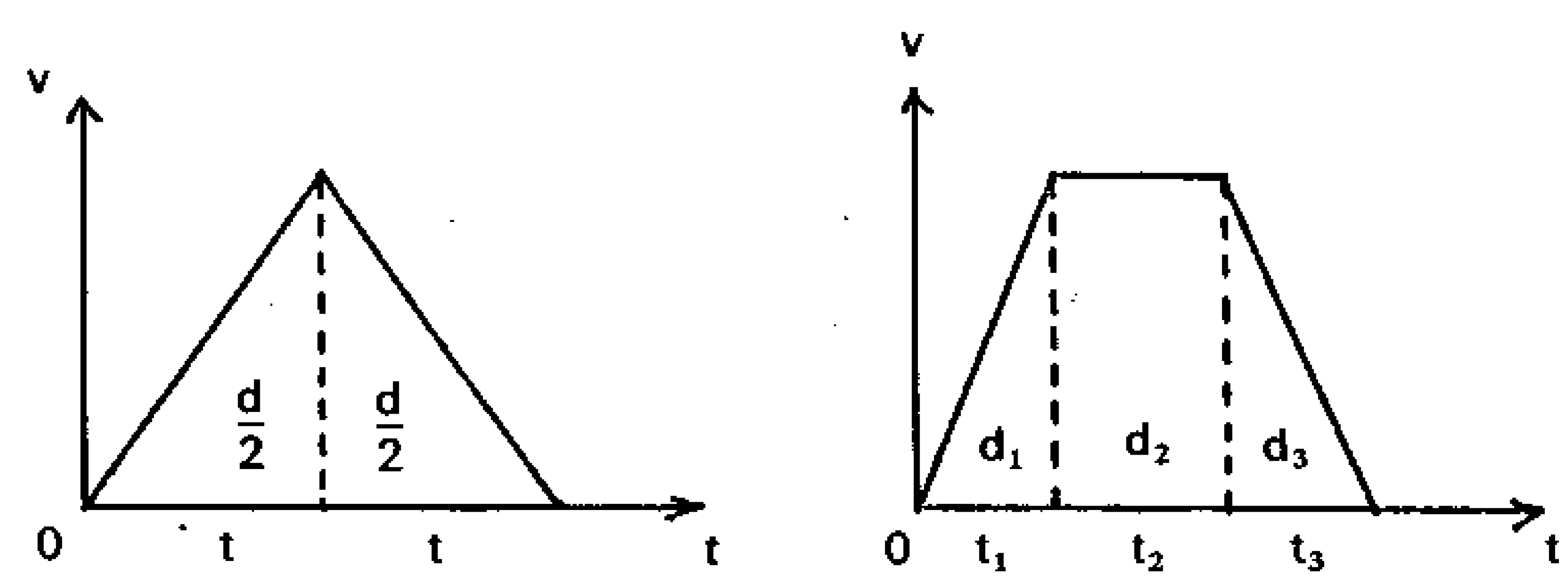
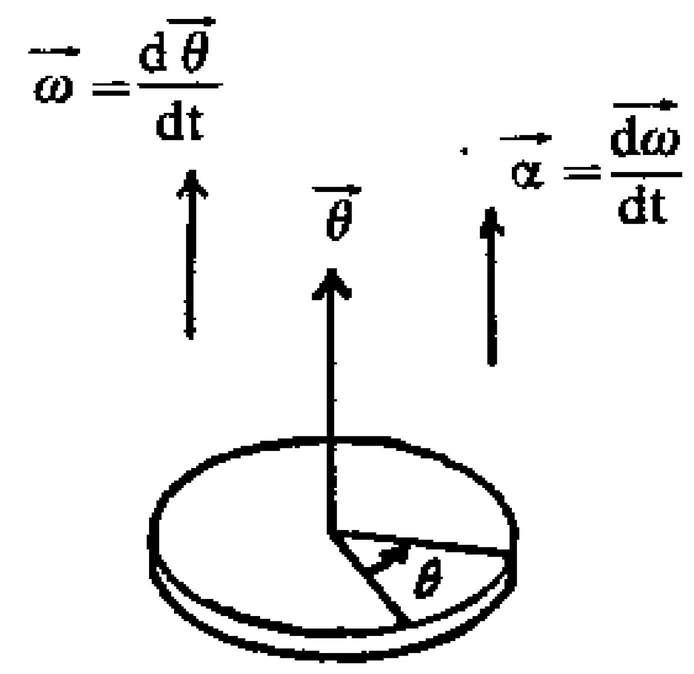
單元3：運動學

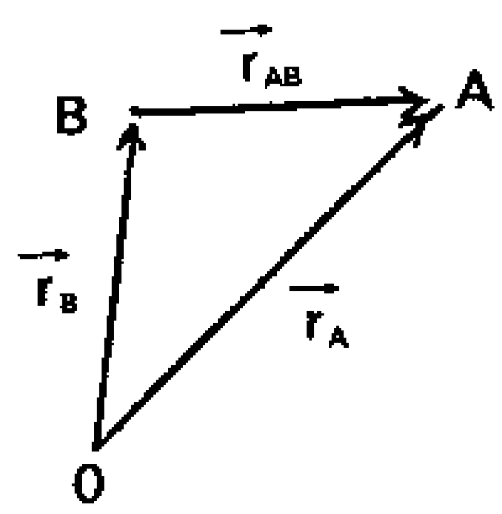
特定目標：

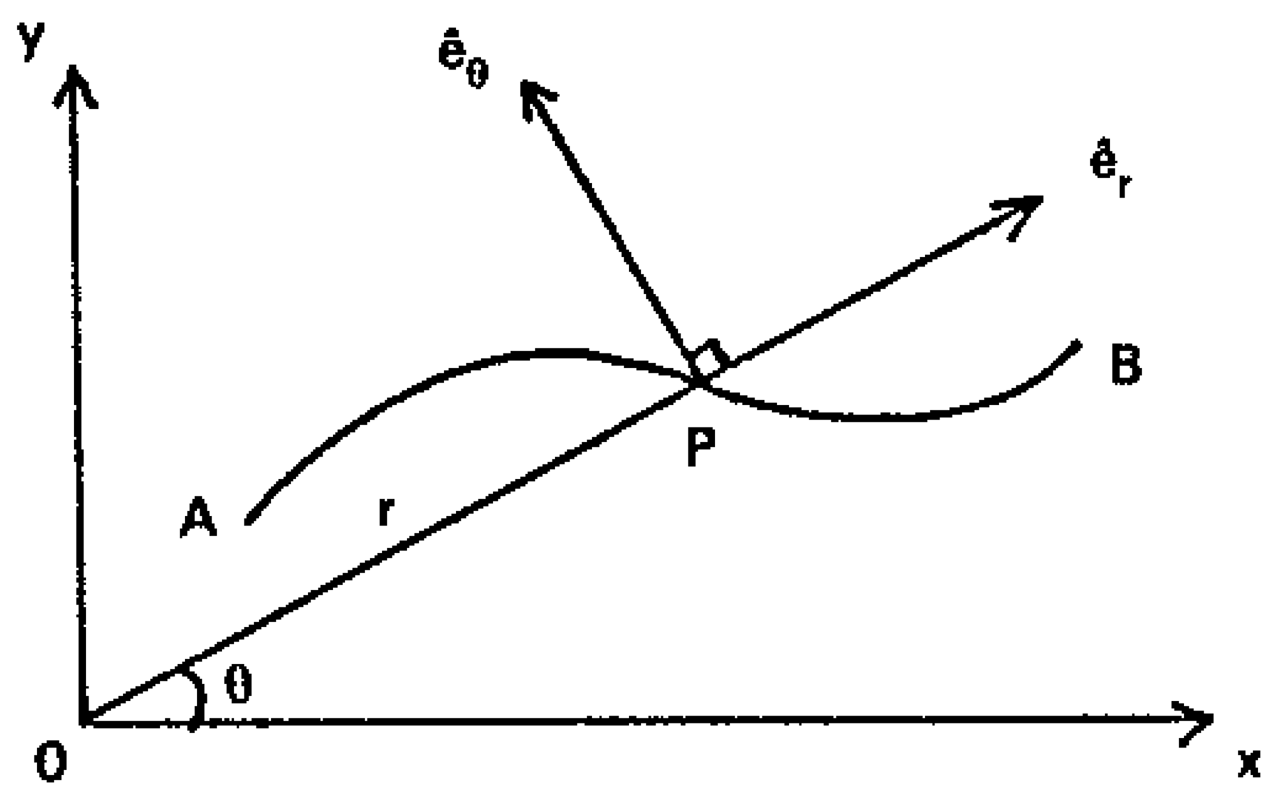
1. 理解位移、速度和加速度及其對應的角位移、角速度和角加速度的意義。
2. 理解合成速度和相對運動。
3. 認識速度和加速度的徑向和橫向分量。
4. 解有關的實際問題。

內容	時間分配	教學建議
3.1 位移速度和加速度	2	教師應替學生復習位移、速度和加速度的意義，此外教師應嘗試利用向量和微積分的探討方法。為簡單起見，教師可先局限在沿x軸的運動並取x增加的方向為正向方向。若此，學生應不難導出以下公式 $v=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$，$a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$ 或 $a=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$。 教師應提醒學生當x、v和a是負數時的物理意義。 對恒加速度的情況，學生應能自行導出以下的公式： $v=u+at$ $x=ut+\frac{1}{2}at^2$ $v^2=u^2+2ax$ 應在此引入質點的二維運動。教師應提醒學生取質點位移、速度和加速度的x和y軸分量，然後可以在這個方向應用直綫運動方法。記質點在一點的位移為 $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，學生在引導下應能發現 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 及 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 從上式亦不難求出速度和加速度的量和方向。

內容	時間分配	教學建議
		在這階段，應強調利用直角座標的參數方程去描述質點的運動路徑。學生應懂得應用1.10節中學會的知識和技巧去解問題。以下是一些例子。 *例一* 質點P由原點O出發的速度向量 $\vec{v}$ (ms^{-1}) 是 $80\vec{i}+(50+10t^2)\vec{j}$。相對於原點O，P在時間t的位置向量及加速度向量可輕易在求 $\vec{v}$ 的積分和導數中獲得。 *例二* 兩車站的距離是d。一列火車由一車站出發在時間t到達下一車站。若最大的加速度或減速度均是a而最大速度不能超過v，證明t的最小可能值是 (*a*) $t=\frac{d}{v}+\frac{v}{a}$ 若 $d\geqslant\frac{v^2}{a}$ (*b*) $t=2\sqrt{\frac{d}{a}}$ 若 $d<\frac{v^2}{a}$ 在此例中，教師可引導學生利用幾何作圖的方法求解： 

內容	時間分配	教學建議
3.2 角位移、角速度和角加速度	1	教師應簡略地介紹有關角位移、角速度和角加速度的概念，學生亦應懂得以下三個有關綫性量和角量的關係： $s=r\theta$ $\dot{s}=r\dot{\theta}$　（或 $v=r\omega$） 及 $\ddot{s}=r\ddot{\theta}$　（或 $a=r\alpha$）  角運動的向量表達法可以右圖說明。學生應知道利用右手法則確定旋轉的正方向。只要轉動是局限在單一平面上，轉動向量 $\vec{\theta}$、$\vec{\omega}$ 及 $\vec{\alpha}$ 將會互相平行而可以當作標量處理，因為代數的正負號已足夠說明向量的方向。 *例* 一圓盤以加速度 $\ddot{\theta}=2t$ 沿着軸心轉動。若初始條件為 $\theta=0$ 弧度，$\dot{\theta}=0$ 弧度／秒，求時間 $t=3$ 秒時的角速度和角位移。 學生可以在此例中利用積分法得出結果。
3.3 合速度	3	這裡強調的是如何求得質點的合速度。教師應提醒學生可利用三角形（或多邊形）定律或分量法去求合速度。一些如划船橫渡河流和雨點在氣流中落下等問題可作討論。在這些情況中，學生應利用向量圖去求合速度。速度並不互相垂直的情況也應討論。以下是一例子。

內容	時間分配	教學建議
		例 一艘貨船離開港口，向着N50°E的方向進發，其在靜水中的速度為 $25kmh^{-1}$，但水流則以 $4.5kmh^{-1}$ 的速度向東流，求貨船的合速度。 在上例中，學生除了可以把速度沿東和西方向分解求合速度外，還可以利用正弦和餘弦定律去求合速度。
3.4 相對運動	8	教師應替學生復習有關位置向量的概念。而相對運動的概念可以利用向量的方法引入，如圖所示，A相對B的位置向量是 $\vec{r}_{AB}=\vec{r}_A-\vec{r}_B$  因此，$\dot{\vec{r}}_{AB}=\dot{\vec{r}}_A-\dot{\vec{r}}_B$ 即A相對B的速度是 $\vec{v}_{AB}=\vec{v}_A-\vec{v}_B$ 要介紹A相對於B的速度，較易的方法可在A和B上加上速度 $-\vec{v}_B$“使B靜止”，即能得到A相對於B的速度是 $\vec{v}_A-\vec{v}_B$。相對速度的問題可以利用三角學和向量的知識去解決。其中有關攔截和兩物體最短距離的問題是典型的例子。 *例一* A船以速度 $50kmh^{-1}$ 向南移動。從A船觀察，B船似以速度 $75kmh^{-1}$ 向西南方向移動，求B船的速度。 在上例，教師可引導學生畫出三角形的向量圖，然後用正弦和餘弦定律求B的速度。 *例二* 在中午，S船在原點以速度 $10\vec{j}$ 出發。同時，另一艘船 S_2 以位置向量為 $\vec{r}=-10\vec{i}-10\vec{j}$ 和速度向量為 $20\vec{i}+25\vec{j}$ 出發。 在上例中，教師可引導學生寫下在時間t時一船相對另一船的向量方程，然後兩船的最近位置向量和最接近的距離亦可加以討論。

內容	時間分配	教學建議
		例三 一顆人造衛星以恒速率 ukmh^{-1} 沿西北方向的路徑與水平成傾角 θ 下墜。一艘朝西以恒速率 vkmh^{-1} 行駛的船從點 0 觀察得衛星離船的水平距離為 dkm，高度為 hkm，而方向為西北方。 (*a*) 相對於 0 點，求 (i) 人造衛星的位置向量；(ii) 人造衛星的速度 的表達式。 (*b*) 求船和人造衛星之間的最短距離。 這個例子可以幫助學生綜合有關向量和相對速度所學到的知識。 最後教師可以向學生提出，要為 A 相對 B 的加速度下定義，學生可用與相對速度相類似的方法而做，即 $\vec{a}_{AB}=\vec{a}_A-\vec{a}_B$。
3.5 速度和加速度的沿徑向量及垂直徑向量分解	4	考慮質點在平面上的運動，教師可以利用極座標引入速度和加速度的徑向和橫向分量。 

內容	時間分配	教學建議

設 P 是質點在時間 t 時的位置，APB 是質點的路徑和 P 的極座標是 (r,θ)。

因此 $\overrightarrow{OP}=\vec{r}=r\hat{e}$ 而 $\hat{e}_r$ 和 $\hat{e}_\theta$ 是平行於和垂直於 $\vec{r}$ 的單位向量。

在以上 1.11 節學生已學會 $\dot{\hat{e}}_r=\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 和 $\dot{\hat{e}}_\theta=-\dot{\theta}\hat{e}_r$。對它們直接微分，學生不難得到以下結果：

$$\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_0 \text{ 和}$$

$$\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

表列以上結果有助學生認識清楚表達式。

	徑分量	橫分量
速度	$\dot{r}$	$r\dot{\theta}$
加速度	$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$	$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ 或 $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$

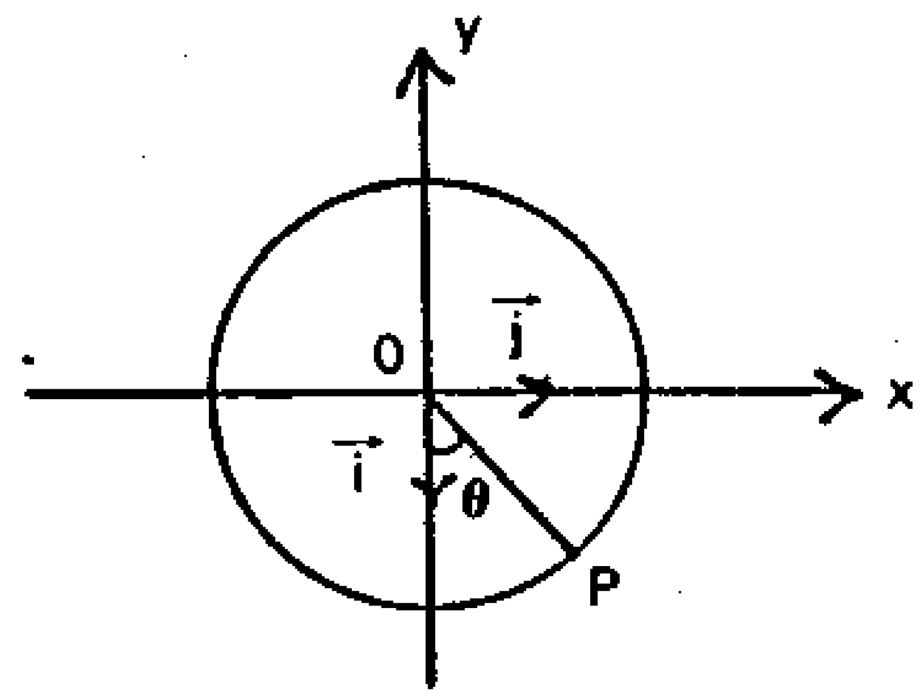
例一

一單位質量的質點在平面上移動，其極坐標為

$$r(t)=1+t$$

$$\theta(t)=\frac{\pi}{1+t} \text{ 而 } t\geqslant 0$$

在時間 t＝1 時，求質點的速度和加速度的徑向和橫向分量。

內容	時間分配	教學建議
		例二 質點P以圓心O和半徑a繞着圓圈運行如圖示。其位置向量在時間t時為 $\vec{r} = a\vec{e}_r$ 其中 $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ 若 $\vec{e}_0 = -\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{i}$ 求證 $\dot{\vec{r}} = a\dot{\theta}\hat{e}_0$ 及 $\ddot{\vec{r}} = a\ddot{\theta}\hat{e}_0 - a\dot{\theta}^2\hat{e}_r$  雖然極座標是很適合去解一些有關中心軌道的動力問題，但有關軌道問題的詳細知識是不需要的。
	18	