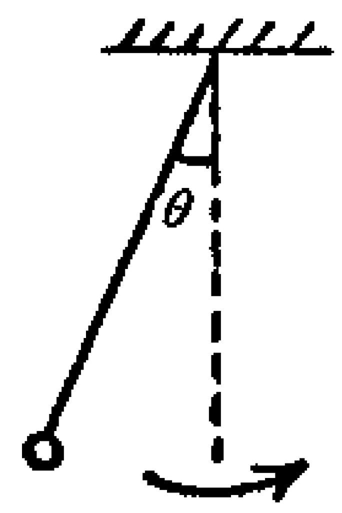
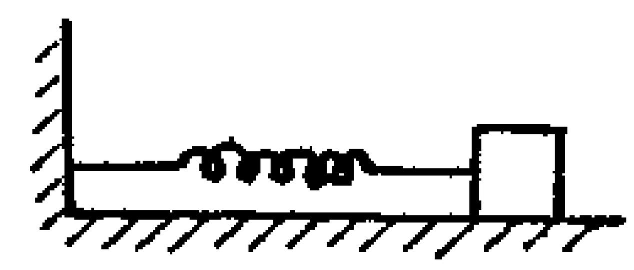
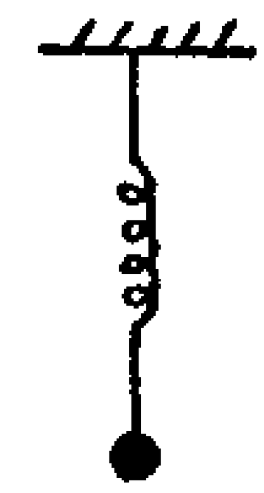
單元9：簡諧運動

特定目標：

1. 認識簡諧運動。
2. 認識阻尼振動及受迫振動。
3. 解有關應用題。

內容	時間分配	教學建議
9.1 簡諧運動	12	教師可用單擺和彈簧系統來介紹簡諧運動的概念。

$\ddot{\theta}=-\frac{g}{\ell}\theta$　　　$\ddot{x}=-\frac{\lambda}{m\ell}x$　　　$\ddot{x}=-\frac{\lambda}{m\ell}x$

學生應知道任何滿足運動方程：$\ddot{x}=-\omega^2x$ 的運動便是簡諧運動。他們亦應留意方程中的負號。教師可將此單元與範疇II(微分方程)聯繫。

當學生學習了有關的概念後，教師應引導學生得出以下的基本公式：

加速度　$\ddot{x}=-\omega^2x$

速度　$\dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\alpha)=\omega\sqrt{A^2-x^2}$

位移　$x=A\sin(\omega t+\alpha)$

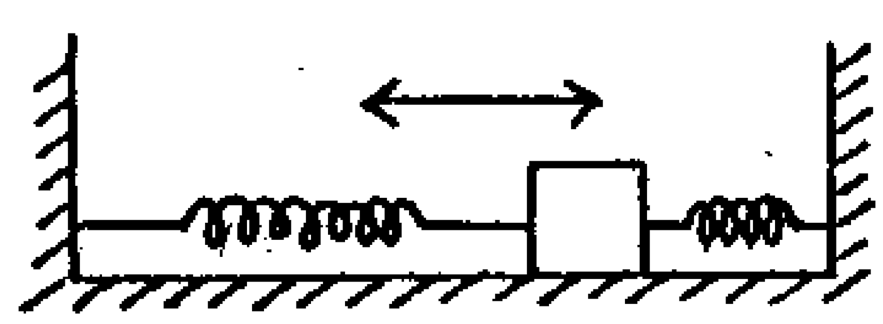
週期　$T=\frac{2\pi}{\omega}$

教師應提醒學生比較加速度、速度和位移的方向。

內容	時間分配	教學建議
		教師亦應與學生討論其他簡諧運動的日常例子。以下是其中的一些例子：

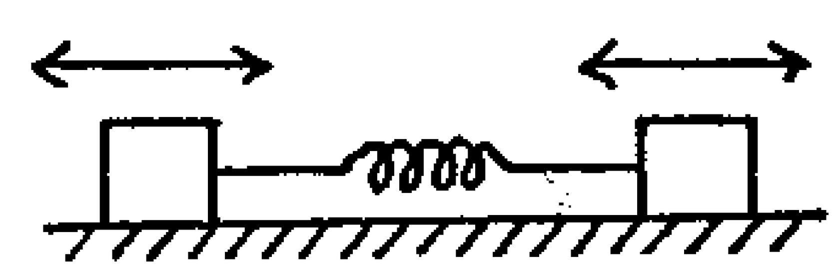
1. 一浮在水上的圓柱木塞垂直振動。
2. 液體在U形管內振動。
3. 如下圖所示的一些複雜彈簧系統或橡皮筋系統。

(*a*)



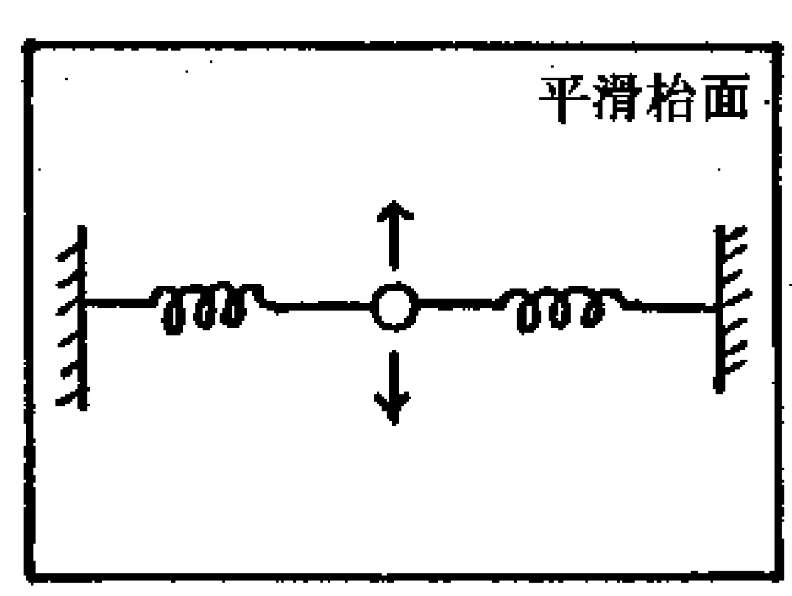
平滑表面

(*b*)

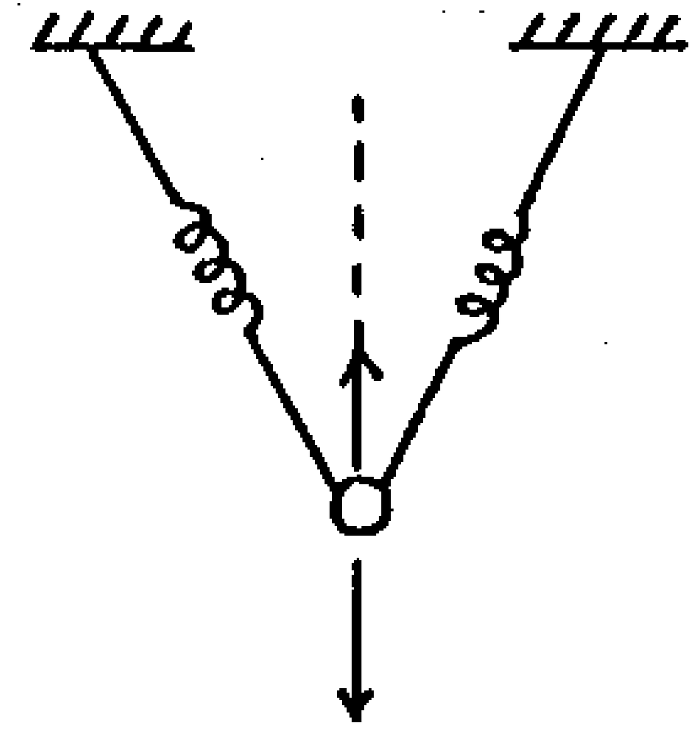


平滑表面

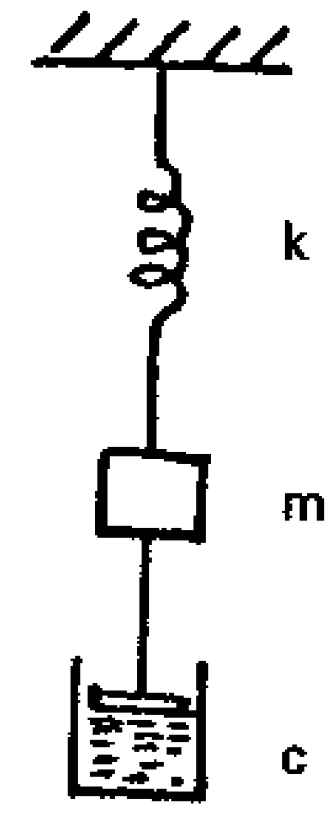
(*c*)（振幅小）

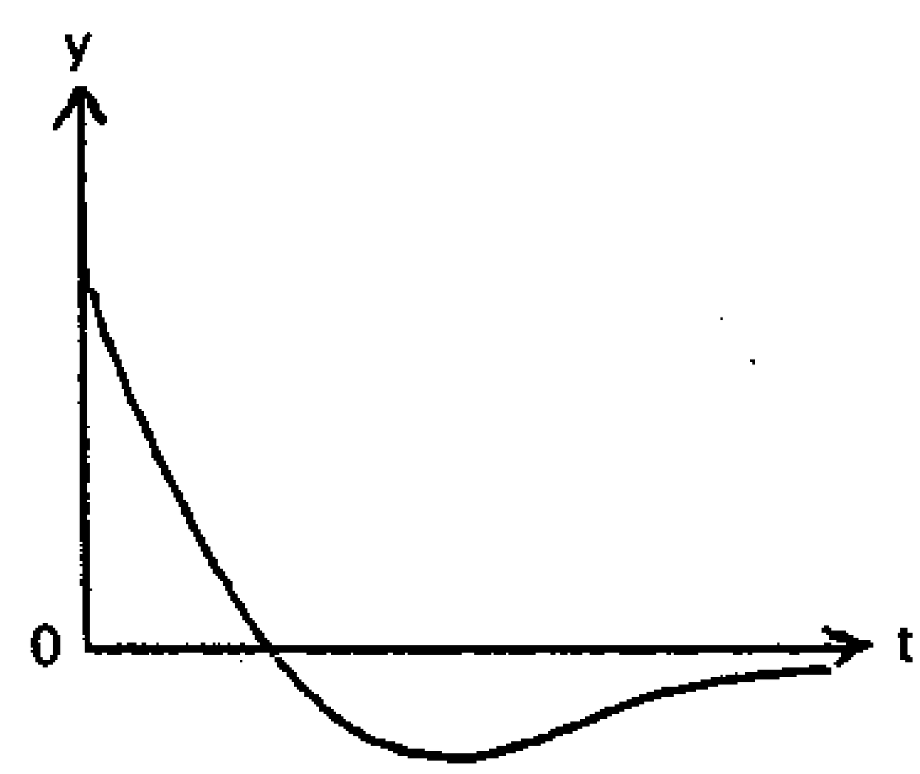
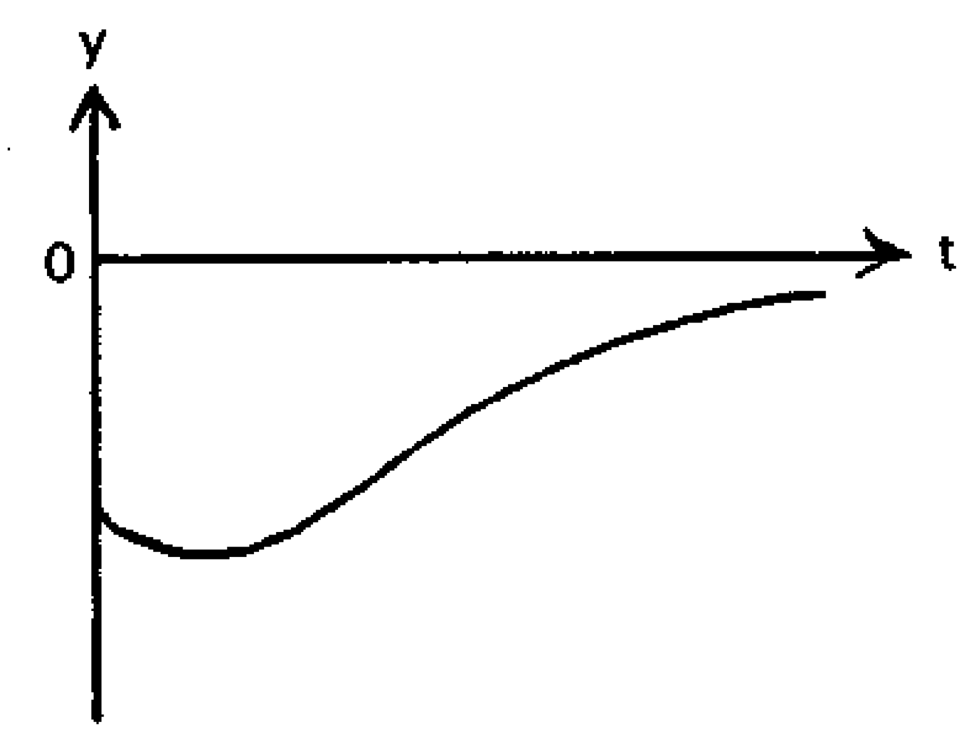
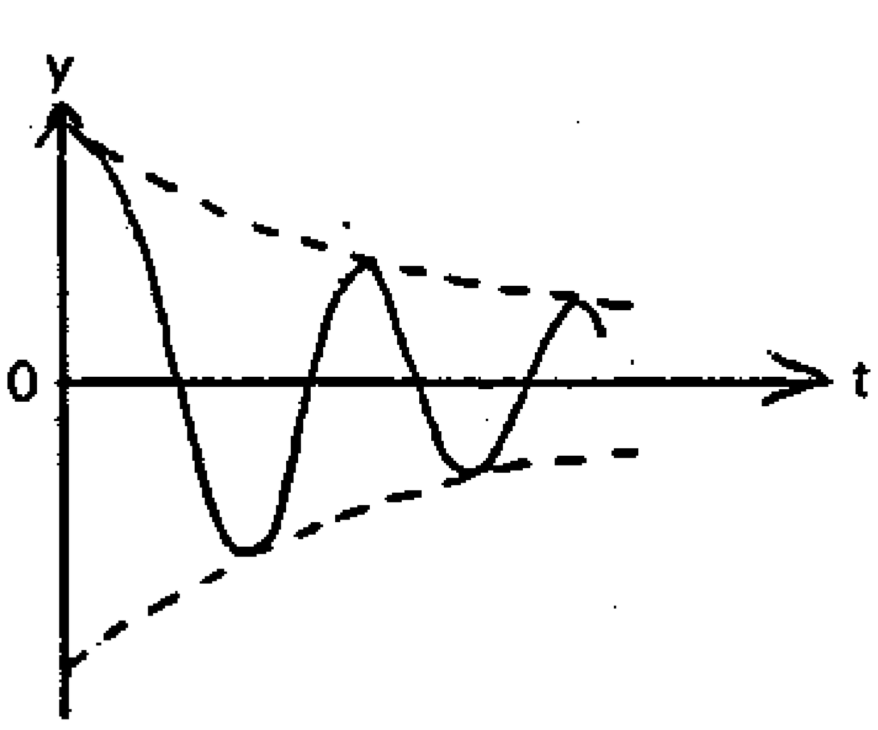
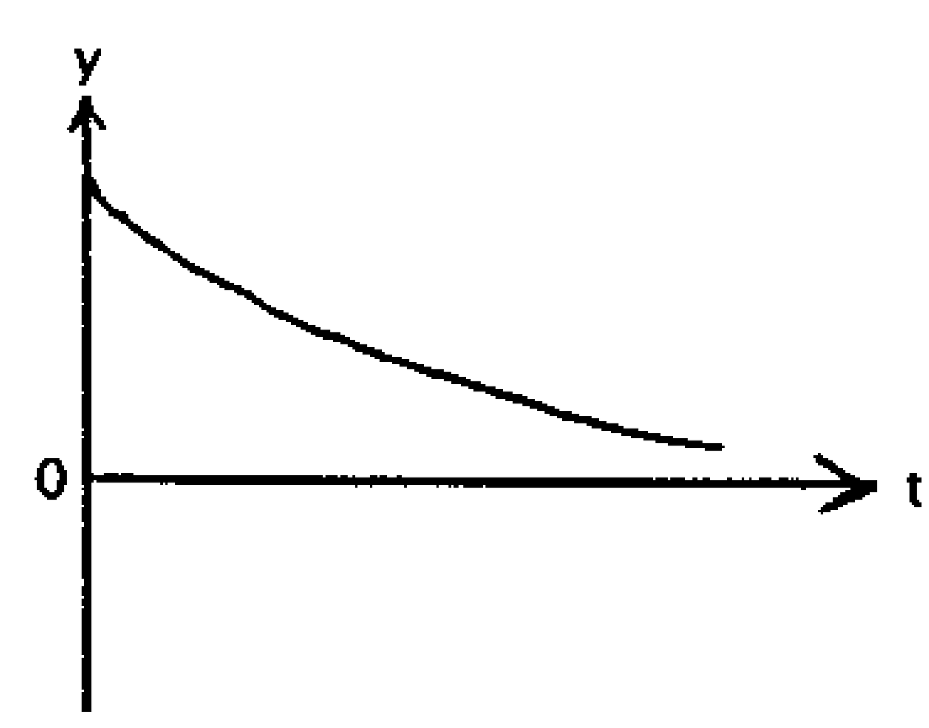


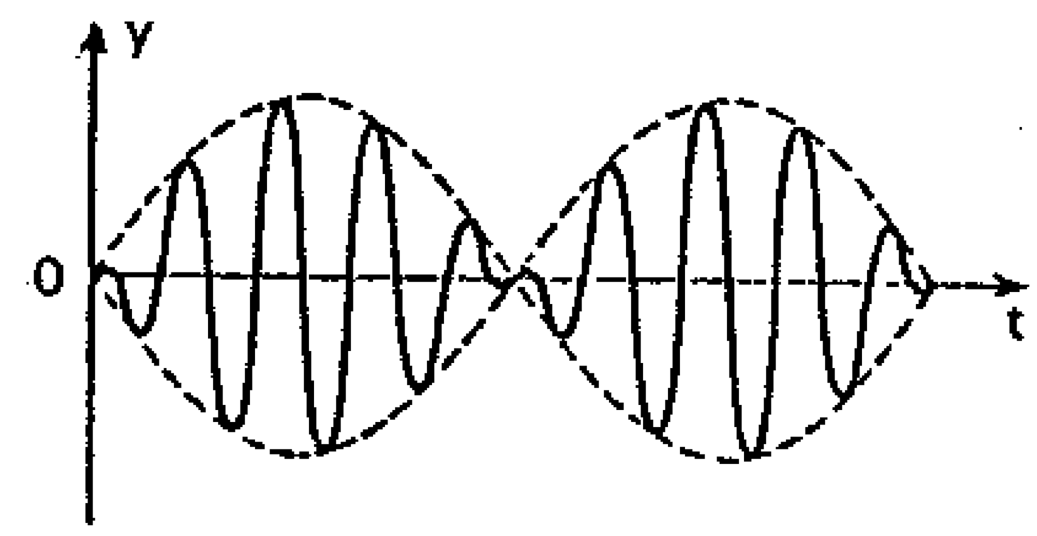
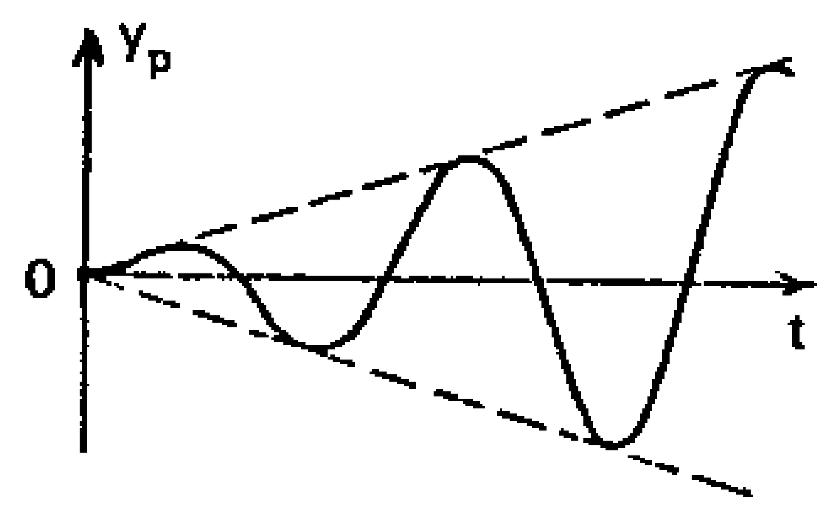
(*d*)（振幅小）



給予學生足夠的訓練是非常重要的。以下是一些有代表性的例子。

內容	時間分配	教學建議
		例一 一質量為 m 的質點 A 置於一輕彈簧末端，且平衡地懸垂於一定點處。彈簧之模數是 K。若另一質量為 M 的質點 B 加於 A 之上，然後放行；求這合成振動的運動方程和振幅。 *例二* 一重質點懸掛於一橡皮筋的末端，且以振幅 a 作垂直簡諧運動。運動中的最高速率是 $\sqrt{nga}$，且 $n>1$。當質點向上移至與中心點 O 相距 x 時，拉緊的橡皮筋被切斷。探究質點隨後的運動，並找出它能到達的最大高度。
9.2 阻尼振動	3	教師可利用彈簧系統，加入與速率成比例的阻力，來介紹阻尼振動的概念。(看附圖)若 m 是物體的質量，c 是液體的阻尼係數，且 k 是彈簧常數，則運動方程將是以下的形式： $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$ 以上的方程是二階微分方程。若學生學習了單元 13，他們應不難解以上的方程。不然，教師可將答案直接提供給學生，而證明則留待在單元 13 時才討論。  教師應與學生討論上述微分方程的根的性質；該等性質並可劃分為三類：超阻尼、低阻尼和臨界阻尼。以下四圖顯示在不同的初值條件下，位移 (y) 與時間 (t) 的變化。

內容	時間分配	教學建議
		 正初位移  負初位移 *負初速度下之超阻尼諧運動*  低阻尼諧運動  臨界阻尼諧運動

內容	時間分配	教學建議
		例 一質量為 m 的質點置於一橡皮筋的末端，而橡皮筋則從一定點處懸垂。橡皮筋的自然長度是 ℓ，其彈性模數是 $5mn^2\ell$。當振動時，質點的運動受着一阻力的影響，而該阻力的量值是 2mn 倍其速率。質點初時位於平衡位置，其後則以速率 v 從平衡位置向下拋射。 在此例中，學生應可證明運動方程是 $\ddot{x}+2n\dot{x}+5n^2x=0$，而 x 是在時間 t 的位移。教師可引導學生解以上的方程，並找出該質點瞬時靜止的時間。
9.3 受迫振動	5	驅動力 F(t) 應是以下的其中一種形式：t^n、$\cos\ \omega t$、$\sin\ \omega t$、e^{ut} 或這些函數的綫性組合。教師應與學生討論以下兩種情況： (*a*) *無阻尼受迫振動* 這振動的運動方程是 $m\ddot{x}+kx=F(t)$。教師可與學生討論如何找出方程的通解和特別解。教師應着重此類方程的解的實際意義。例如：當 $F(t)=F_0\sin\omega t$，以下是兩種情況下的特別解。 *拍*  *共鳴* 

內容	時間分配	教學建議
	20	(*b*) *阻尼受迫振動* 學生應不難得出運動方程為 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$。 若 F(t) 是已知，則方程的解可直接找到的。在某些情況下，學生是需要從已知條件中找出驅動力的數式。以下是其中一個例子。 *例* 兩質點的質量分別為 m 和 2m，由一條不能伸延的繩子連接。繩子跨過一光滑的固定滑輪(如圖示)。另一質量為 m 的質點，由一彈簧與較重的質點連接。彈簧的模數是 k。初時彈簧沒有伸長，然後所有質點從靜止中放行。探究所有質點的隨後運動。 在此例中，作用於第三粒質點的驅動力不是直接知道的，學生需要由有關資料求出。