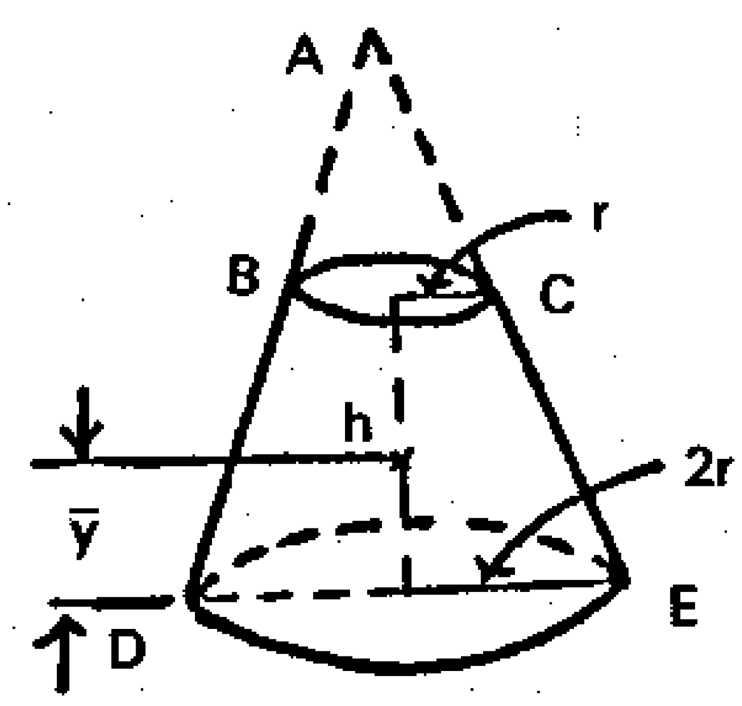
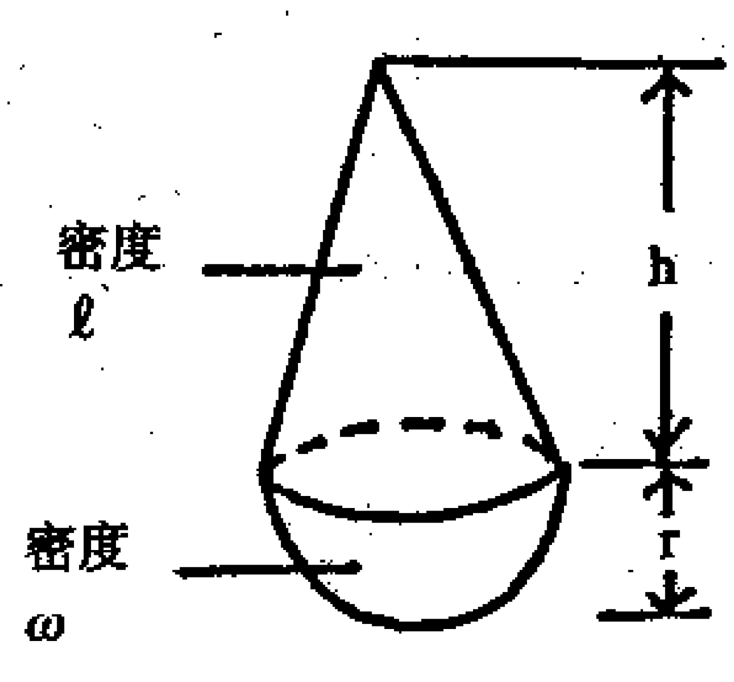
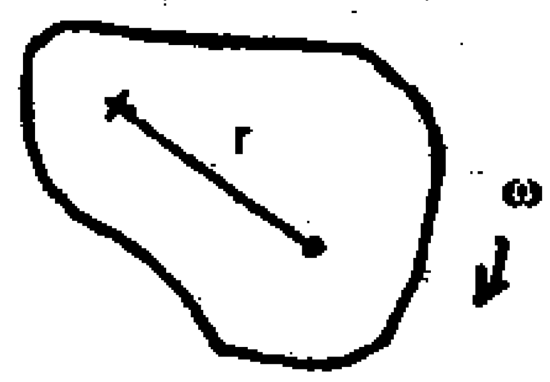
單元 11：剛體運動

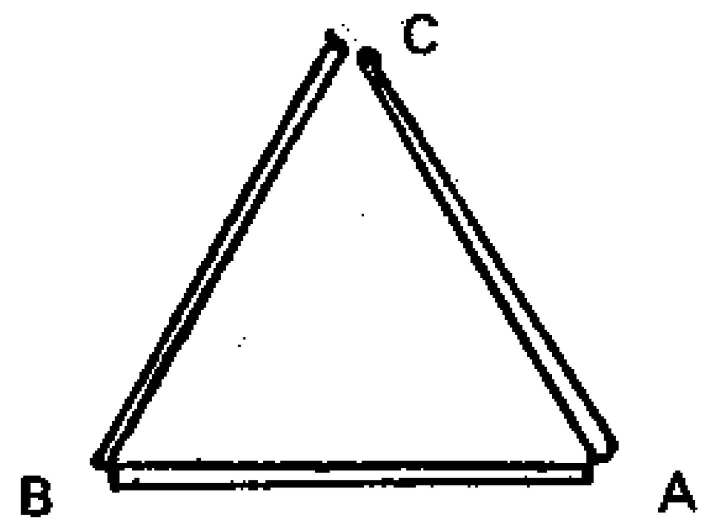
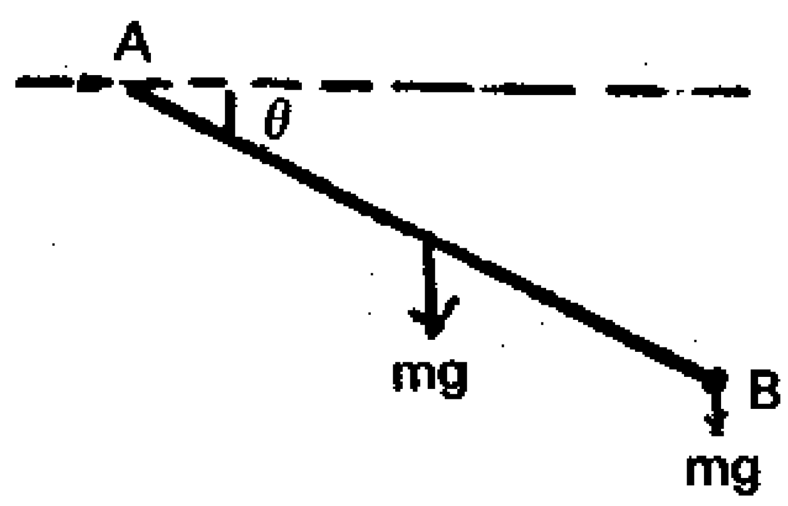
特定目標：

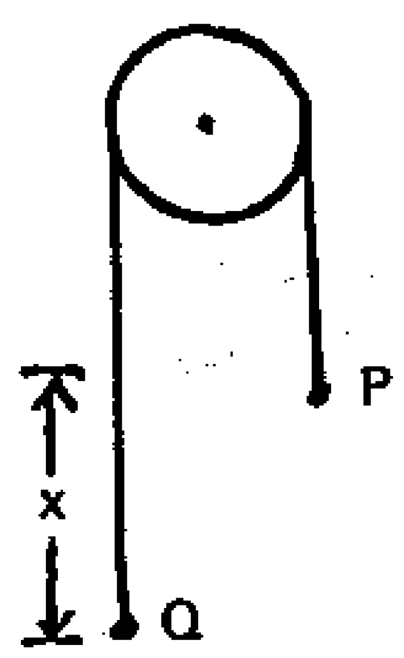
1. 找出一剛體的質量中心與及慣性距。
2. 理解及運用角動量守恆定律。
3. 解有關剛體的動力學問題。

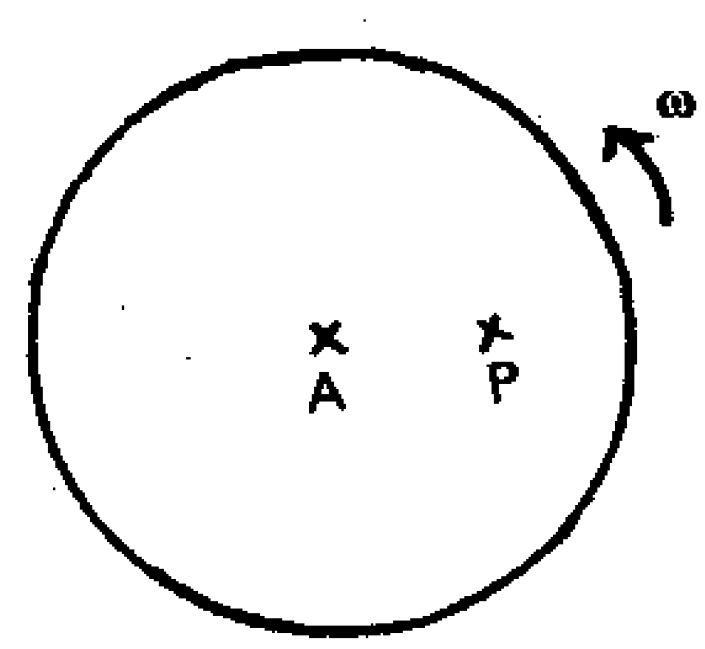
內容	時間分配	教學建議
11.1 質量中心 (*a*) 簡介	6	由於學生並不太認識「剛體」這個名稱，故此教師可由有限數量的質點開始，從而介紹質量中心的定義。 教師並可引用簡單的例子幫助學生了解以下公式： $\vec{r}_c=\dfrac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{\Sigma m_i}$ 其中 $\vec{r}_c$ 代表質量中心的位置向量。 *例* 將四個質量分別為 m_1、m_2、m_3 及 m_4 的物體放置在一邊長為 a 的正方形的頂點 A、B、C 及 D 上。求質量中心的位置。 在此例中，學生應可計算以 A 為原點的質點系的質量中心的位置向量。利用 C 為原點，教師可提醒學生質點系的質量中心的位置向量是與所選取的基準點無關。
(*b*) 以積分法求質量中心		當物體不能分割為有限數量的質點時，它可分為大量的細小部分，而這些部分稱為元素。由此，質點中心的位置可由積分求得： $\bar{x}=\dfrac{\int x\,dm}{\int dm}$ 和 $\bar{y}=\dfrac{\int y\,dm}{\int dm}$ 教師應討論一些如均勻棒、三角薄片、實心及空心半球體、圓弧等的例子。 教師可引出不同的例子，以闡釋找出不常見物體的質量中心的技巧。例如，教師可要求學生找出一個由 x 軸、x＝2 及拋物綫 $y^2=4x$ 所圍成的區域繞着 x 軸旋轉而形成的均勻立體的質量中心。

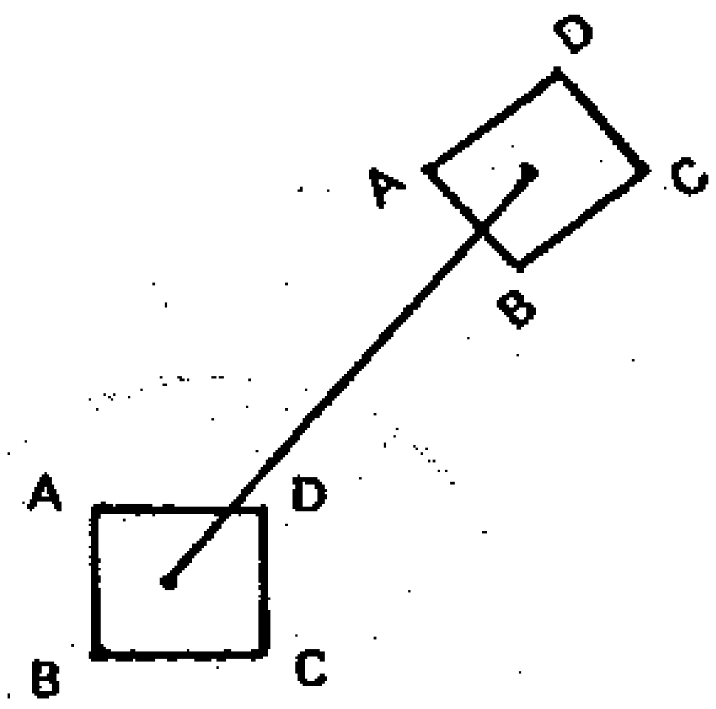
內容	時間分配	教學建議
		學生應知道對於一些涉及旋轉體的剛體，如實心圓錐體等，碟形是重要的元素；相同地，對於有關一些涉及旋轉曲面的剛體，如空心半球體等，環形是重要的元素。
(*c*) 複合物體的質量中心		教師可利用複合物體不同部分的相對質量來找出該複合物體的質量中心。 *例一* 求一實心平截頭體的質量中心。  學生可先求出兩個假定圓錐體 ABC 和 ADE，及平截頭體 BCED 的相對質量，從而計算那平截頭體的質量中心。結果是 $8(2h/4)=7\bar{y}+(1)(h+h/4)$ *例二* 求出一個由直立圓錐體及半球體組成的立體的質量中心。  在此例中，若該物體在其半球體曲面上任何部分與一平滑水平面接觸均能達致平衡，教師可引導學生找出相對的 $\dfrac{h}{r}$ 值。

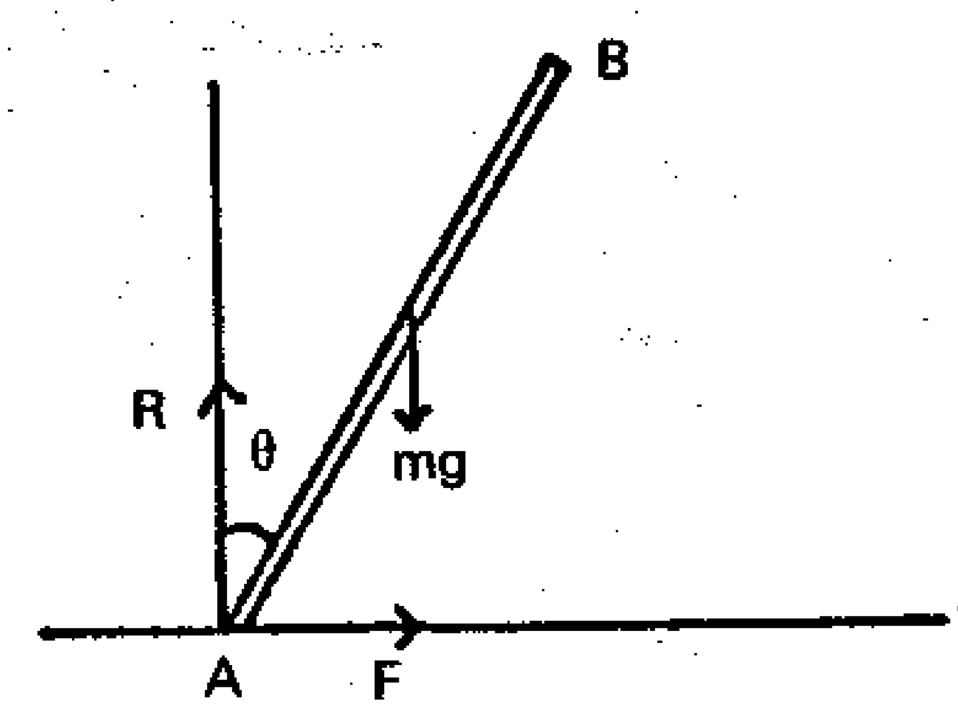
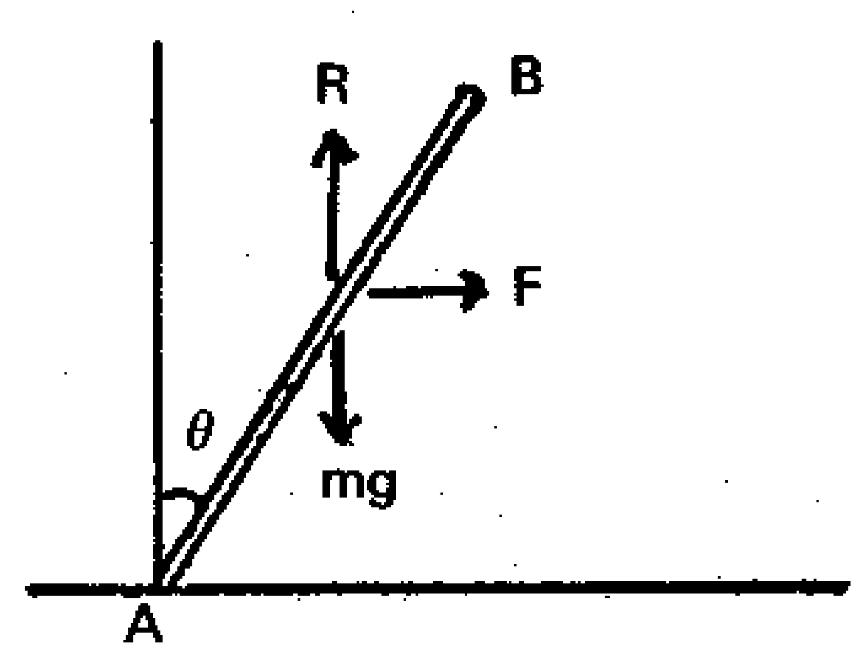
內容	時間分配	教學建議
11.2 慣性矩 (*a*) 簡介	6	教師可先向學生說明一個剛體的運動是有別於一個質點的運動，而一般運動可包含平移及旋轉。 透過考慮繞一固定軸的剛體旋轉運動，學生不難找出該剛體之動能數式。  動能 $=\frac{1}{2}\omega^2(\Sigma mr^2)$ 教師然後可介紹「慣性矩，$I=\Sigma mr^2$」，並提醒學生 I 是非常重要的，且常會出現於涉及剛體旋轉的題目中。
(*b*) 以積分法求慣性矩		教師應引導學生求出一些有限數量質點的慣性矩從而將這概念伸展至求剛體對一已知軸的慣性矩。積分法的技巧可應用於後者。 學生應理解物體的慣性矩與以下兩點有直接關係： (*a*) 旋轉軸的位置； (*b*) 圍繞軸的質量分佈。 教師可與學生討論一些例子，如均勻棒、長方形薄片、環形、碟形及球體等。
(*c*) 平行及垂直軸定理		在此階段，學生應已熟識利用基本原理找出剛體慣性矩的技巧，接著，教師可介紹平行軸定理及垂直軸定理。若學生已知一剛體繞某些標準軸的慣性矩，則此二定理可助他們找出剛體繞其他軸的慣性矩。由此，學生可省略大量應用積分法的計算。教師應指導學生怎樣利用此二定理去找出慣性矩。 教師亦可與學生討論一些例子，如一碟形繞切綫的慣性矩，及一實心圓錐體繞一通過頂點且垂直對稱軸的軸的慣性矩等。 教師可提醒學生以下兩點： (*a*) 垂直軸定理只可運用在薄片形的剛體； (*b*) 在平行軸定理中，一均勻物體繞一穿過質量中心的軸的慣性矩是比穿過任何一條平行軸的慣性矩少 Md^2，其中 M 是該物體的質量，而 d 是平行軸間的距離。

內容	時間分配	教學建議
(*d*) 複合物體的慣性矩		學生應知道將一個複合物體各部分的慣性矩加起來，便可求得該物體的慣性矩。教師可與學生討論一些例子，如求物體（見下圖）繞一穿過 A 和垂直 ABC 平面的軸的慣性矩。 
11.3 繞固定軸的剛體運動 (*a*) 能量守恒	6	對於一個普通學生來說，「剛體的一般運動」是一個較困難的題目，故此，教師可先討論繞固定軸的剛體運動。 學生應懂得運用能量守恒定理，以解答有關剛體繞固定軸旋轉的問題。 *例* 一質量為 m、長 2a 之均勻棒 AB，可任意繞一穿過 A 點的水平軸旋轉。另一質量為 m 的質點則附在棒上 B 點的位置。當 AB 處於水平狀態時，棒由靜止中放行。  教師應令學生注意棒 AB 是不可以視為質量點處理的。 教師可根據能量守恒定理，引導學生找出角速度 $\dot{\theta}$ 及角加速度 $\ddot{\theta}$。

內容	時間分配	教學建議
(*b*) 角動量定理		教師可與學生討論繞固定軸的角動量之定義。學生應認識角動量定理 $I\frac{d\omega}{dt}=I\ddot{\theta}=L$，其中 L 是那些施於物體上的作用力對該固定軸的力矩。 以上的方程是可與牛頓第二定理 $m\frac{dv}{dt}=F$ 相比較。 以下是一些可與學生討論的例子： *例一* 一飛輪繞軸的慣性矩為 $10kg\ \ m^2$。當該輪以角速度 ω_o 旋轉時，一 20Nm 的恆轉矩加於其上，為時三秒。 從 $I\ddot{\theta}=L$，學生應不難求得 $\ddot{\theta}=2$。教師現可引導學生找出下列方程： $\dot{\theta}=\omega_o+2t$，$\theta=\omega_o t+\frac{1}{2}(2)t^2$ 此方程可與另一些得自恆綫性加速度的方程作比較： $V=u+at$，$s=ut+\frac{1}{2}at^2$。 *例二* 一半徑為 a，質量為 M 的滑輪，可隨意繞一水平軸旋轉。一幼綫掛在滑輪上，而綫的兩端分別掛著兩個質點，質點 P 重 m 而質點 Q 則重 2 m。此綫不會在滑輪上滑動。此組合從靜止狀態開始，然後質點 Q 在 t 時間內滑下的距離為 x。  在此例中，教師可與學生討論為何 $x=a\theta$ 及 $\ddot{x}=a\ddot{\theta}$，並著學生注意滑輪兩邊幼綫的張力是不相同的。

內容	時間分配	教學建議
		教師可引導學生寫出 P、Q 及滑輪的運動方程。此外，教師亦可與學生討論有關在此例中引用能量守恆的可能性。 教師應介紹角動量守恆定律，並以簡單的例子說明。 *例* 一均勻的碟狀物體，質量為 m，半徑為 a，它正繞着一通過中心點 A 的垂直軸以恒角速度 ω 旋轉。在距離 A 點 a/2 處，輕輕放下質量為 2m 的質點 P，而 P 在碟上沒有任何的滑動。  教師可向學生解釋，說明由於沒有外來轉矩，角動量必定要守恆。 教師並可引導學生找出新的角速度（與質點的角速度相同）。
(*c*) 應用		教師亦可引用其他例子，如由力偶所產生的功能 $\int L\ d\theta$，轉矩的衝量 $\int L\ dt$，圓錐擺等。
11.4 剛體的一般運動	16	教師可以圖解方式，教授剛體的一般運動。
(*a*) 簡介		

內容	時間分配	教學建議
		學生應知道一般運動，是包括兩部分的： (1) 質量中心的平移， (2) 繞質量中心的旋轉。  教師可推導有關的方程，但重點應放在應用方面。 學生須了解剛體的一般運動，可分別從以下兩點作分析： (*a*) 質量中心的綫性運動， (*b*) 繞穿過質量中心為軸的旋轉運動。
(*b*) 運動方程		教師可與學生討論角動量定理。該定理可綜合如下： 物體繞穿過質量中心為軸的角動量變率等於所有外作用力對同一軸的矩的和。 教師可舉例說明解有關剛體一般運動的問題的技巧。 *例一* 一均勻棒AB，長2a，質量m，垂直地放在一粗糙的水平面上(棒因而沒有滑動)，然後釋放。 學生須了解任何在力作用下的剛體質量中心的運動，是相等於所有質量皆集中於質量中心，而所有力都施於此點上。

內容	時間分配	教學建議
		由於質量中心是進行圓周運動，教師可引導學生求質量中心的運動方程。此外，利用A點的矩和考慮能量，便可得出 $\dot{\theta}^2$ 及 $\ddot{\theta}$，從而計算出F和R。 教師可要求學生利用沿AB及垂直於AB的力來列出運動方程。  *例二* 一長2a的均勻棒，沿一垂直平面滑下，棒的兩端分別接觸著一光滑水平面及一光滑垂直面，質量中心的坐標為(x, y)。 學生可利用質量中心的平移運動以及繞該中心的旋轉運動來求S和R。 

內容	時間分配	教學建議

(*c*) 滾動及滑動

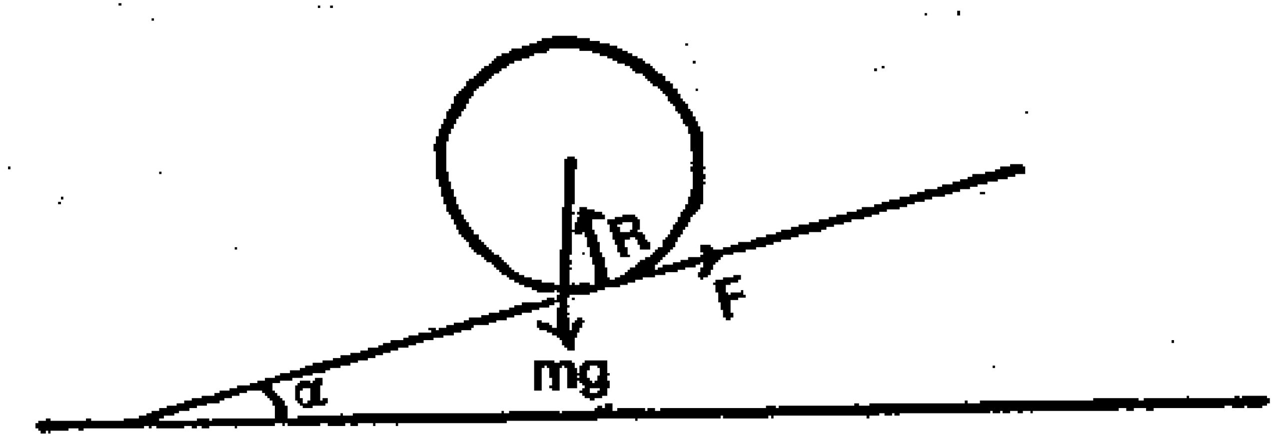
在剛體的一般運動中，「純滾動」及「滑行和滾動」是兩個比較重要的題目，以下是一些可與學生討論的例子：

例一

一半徑為 a 的圓柱體，沿一粗糙斜面滾下。學生應不難得到下列方程：

$I\ddot{\theta} = Fa$ 和

$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F$

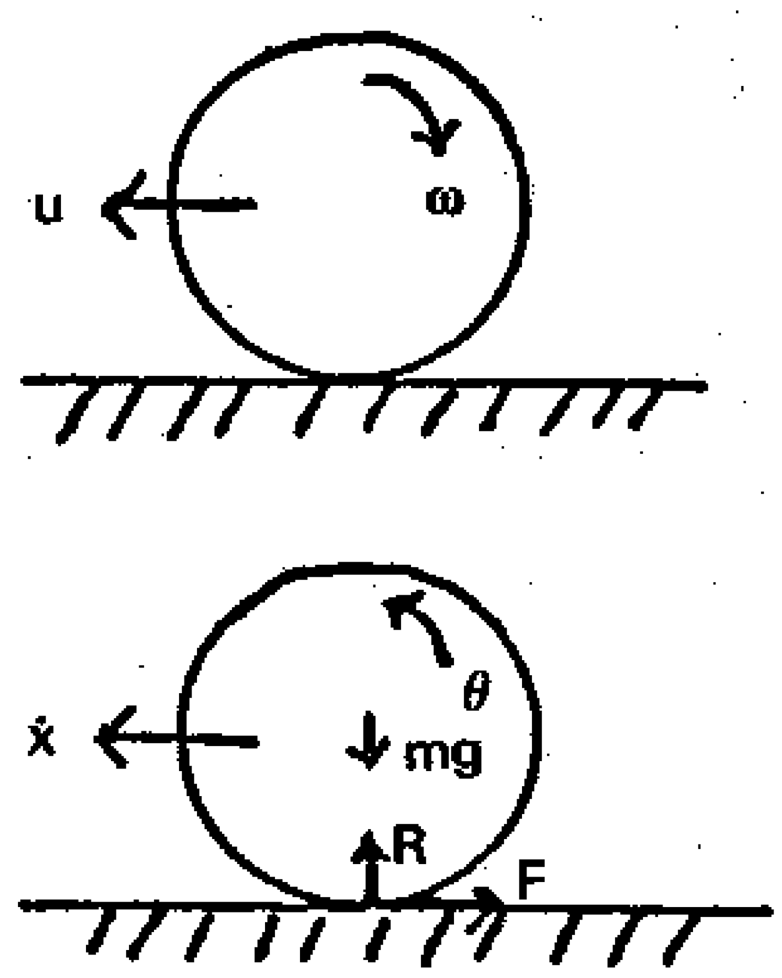


接觸點 A 的速度是 $\dot{x} - a\dot{\theta}$，在滑動的情況下，這速度不會是零的。

學生應知道在純滾動的情況下，$\dot{x} = a\dot{\theta}$。

例二

一後角速度為 ω，速度為 u 圓柱體被放在一粗糙的水平面上。假設在時間 t 時，圓柱體旋轉的角度為 θ，和移動的距離為 x，而接觸點 A 的速度便是 $\dot{x} - a\dot{\theta}$。



內容	時間分配	教學建議

教師可根據下列情況，研究圓柱體最終的運動：

(1) $u > a\omega$ (2) $u = a\omega$ (3) $u < a\omega$

教師應強調學生不可假設磨擦力在沒有滑動的情況下是最大的。

教師亦可討論其他的例子，如實心球體在一固定球體上滾動的運動，實心圓柱體在空心圓柱體內移動的運動等。

(*d*) 剛體的動能

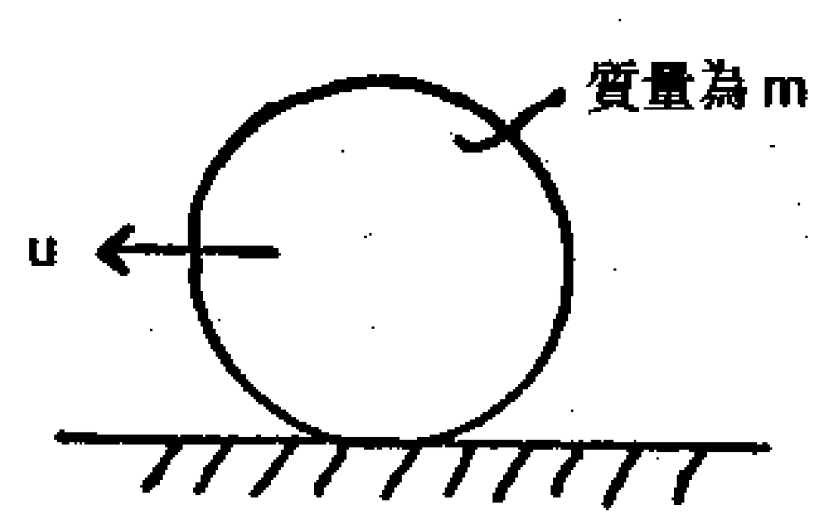
教師應討論一般的動能定理。物體的動能是由質量為 M 的質點在質量中心的綫性動能和物體繞穿過質量中心的軸旋轉動能所組成。

教師可討論如下的例子：

例

一圓柱體在沒有滑動的情況下，沿一水平面以速率 u 滾動。學生應可寫出圓柱體的動能數式，即

動能 $= \frac{1}{2}I\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}mu^2$



34