單元 13：二階微分方程及其應用

特定目標：

1. 學習解某些特定二階微分方程技巧。
2. 在實際的情況下應用有關建立及解二階微分方程的技巧。
3. 能夠理解二階微分方程的解。

內容	時間分配	教學建議
13.1 分類	2	此部分是一階微分方程的延續，主要着重研究下列的方程： $$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$$ 教師應詳加陳述這類方程的特點(如 y 及其導數為綫性，而 p、q 及 f 則為 x 的函數)，並應提供足夠例子予學生，幫助他們分辨不同類別的微分方程如齊次綫性方程 ($f(x)=0$)，非齊次綫性方程 ($f(x)\neq 0$) 及非綫性方程(不能寫成上述形式的方程)。 在此階段，教師可介紹一些二階微分方程的現實生活例子，如繫於彈簧的物體的振動，在引力及與速度成正比的阻力作用下的自由下墜運動，及最佳存貨水平之定價方針等問題。
13.2 疊合原理	2	此原理可用一具體例子說明。例如，讓學生證明$y=x$及$y=x^2$是$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$的解，然後繼續證明 $y=3x+4x^2$ 亦為方程的解。嘗試幾個例子後，教師可引導學生證明疊合原理；但對能力稍遜的學生，則可刪去證明部分。教師可省略綫性齊次方程的解是綫性獨立之原理。教師可以例子引出疊合原理並不適用於非齊次綫性方程及非綫性的方程，例如在 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=1$ 的方程中，$y=1+\sin x$ 及 $y=1+\cos x$ 是方程的解，但 $y=3(1+\sin x)$ 及 $y=(1+\sin x)+2(1+\cos x)$ 皆不是方程的解。學生應從此例子清楚知道疊合原理只適用於齊次綫性的微分方程。
13.3 常係數齊次方程 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ 的解	4	此處只要求學生利用輔助方程(或特徵方程)求此類方程的解，其他方法並不需要。 教師可與學生討論所產生的三種不同結果，即輔助方程有兩相異實根，兩相同實根，及兩複共軛根。對於後者，若根是 $u\pm vi$，則設 $y=ze^{ux}$，代入，方程式可簡化為 $\frac{d^2z}{dx^2}+v^2z=0$，

內容	時間分配	教學建議
		明顯地，$z=\cos vx$ 及 $z=\sin vx$ 是新方程的解，從疊合原理可得 $z=c_1\cos vx+c_2\sin vx$ 為方程之通解；代入 $z=ye^{-ux}$ 於上式後，可得出原方程式的解為 $y=(c_1\cos vx+c_2\sin vx)e^{ux}$。對能力較高的學生，教師可用恒等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 證明上述結果。 此部分對以後的學習很重要，所以教師應給予學生充份的練習，使其熟練地掌握求解此類方程的技巧。現實生活的應用可留至 13.7 節。
13.4 常係數非齊次方程 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$ 的解 (*a*) 餘函數與特別積分	6	教師應清楚解釋以下之定理： 非齊次綫性微分方程的通解是約簡的齊次方程(即置 $f(x)=0$)的通解及該非齊次方程的特解之和。 教師應對學生強調，為了避免混亂，一般稱約簡方程的通解為「餘函數」而稱非齊次方程的特解為「特別積分」，所以，對非齊次方程來說 通解＝餘函數＋特別積分 此定理之證明，可留給學生當作練習。
(*b*) 待定係數法		學生只須用待定係數法求特別積分，而不須用逆算子法。 教師可利用下表幫助學生記憶多種特別積分 $y_p(x)$ 的試用形式。

函數 $f(x)$	$y_p(x)$ 的試用形式	
x^n	$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$	(o)
e^{px}	Ae^{px}	(p)
$c\cos px$ $c\sin px$ $c_1\cos px+c_2\sin px$	$A\cos px+B\sin px$	(ip)

內容	時間分配	教學建議
		但是教師應提醒學生若上表中括號內之數字是輔助方程的重數為k的根 $(k=1$ 或 $2)$，則 $y_p(x)$ 的試用形式應為 x^k 倍相對的形式。下列的例子可清楚解釋上述重點。 *例一* 設 $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=\cos 2x$，則輔助方程之根為 $\pm 3i$，故餘函數為 $y_c=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$。因為 $2i$ 不是輔助方程的根，所以特別積分的試用式是 $y_p=A\cos 2x+B\sin 2x$。但是，對方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=\cos 3x$，餘函數不變，但因 $3i$ 是輔助方程之根，故此特別積分的試用式應是 $y_p=x(A\cos 3x+B\sin 3x)$。在上述兩種情況，學生應清楚知道他們必須將 y_p 代入方程方可得出A和B之值。 *例二* 設方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=x^2$，因0是輔助方程的其中一根(另一根為 -2)，故特別積分應試 $y_p=x(A+Bx+Cx^2)$，同樣地，可將 y_p 代入方程計算出A，B和C的值。 如果函數 $f(x)$ 是幾個不同類型的函數的綫性組合，則學生求此類方程的解時可能有困難，故此，教師應提供一些例子加以說明。 *例* 設方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=4x+e^{3x}$，輔助方程的根是1和2。因0和3不是輔助方程的根，所以嘗試 $y_p=A_0+A_1x+Be^{3x}$。教師應指出 A_0+A_1x 是相對4x的特解，而 Be^{3x} 是相對 e^{3x} 的特解。但是，若方程是 $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=4x+e^x$，則因為1(1是 e^x 的指數x的係數)是輔助方程的根，$y_p(x)$ 的試用形式應是 $$y_p=\underbrace{A_0+A_1x}_{\text{相對}4x}+\underbrace{Bxe^x}_{\text{相對}e^x}$$ 為求保證學生能熟習解決現實生活難題的實際步驟，教師應給予學生充份的初值或邊界值問題。

內容	時間分配	教學建議
13.5 將方程約簡為常係數的二階微分方程	3	學生可將指定的公式代入微分方程並將之簡化。例如， 1. 代入 $x=e^x$ 可將方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=o$ 簡化為 $\frac{d^2y}{dz^2}+y=o$，但老師應提醒學生 $\frac{d^2y}{dz^2}\neq\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dz^2}$。 2. 代入 $y=\frac{z}{x^2}$ 可將方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(x+2)\frac{dy}{dx}+2(x+1)^2y=e^{-x}$ 簡化為 $\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}+2z=e^{-x}$。 在此類例子中，教師應對學生強調下列公式： $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d}{dx}[\frac{dy}{dz}]$ $=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}$
13.6 一階微分方程組	3	這裏只須考慮可利用消去法化為二階綫性微分方程的簡單方程組；例如，方程 $\frac{dy}{dt}-x=t$ 及 $\frac{dx}{dt}+y=t^2$ 可化簡為 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=1+t^2$，而方程 $\frac{dx}{dt}=x-3y$ 及 $\frac{dy}{dt}=y-3x$ 則可化簡為 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-8x=0$。
13.7 實際的應用	8	在現實生活中，有很多例子可運用二階微分方程去解決。教師應與學生討論如何去理解此類問題的解。下列是一些例子。 1. *振動* 教師可與學生討論簡諧運動、阻尼諧振動及受迫振動的現象，並引導學生建立有關方程及理解方程的解。事實上，教師可將此課題與單元9(簡諧運動)相聯。

內容	時間分配	教學建議

2. *機械問題*

機械力學中很多例子都會引出一條二階微分方程，例如，一物體在恒引力及與物體速率成正比的阻力作用下自由下墜，其運動方程如下：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\frac{dx}{dt}$$

同樣地，學生應能自己建立方程及理解方程的解。

3. *商品的定價方針*

以下是某公司對其所生產的商品的定價方針。

$$\frac{dP}{dt}=-k(L(t)-L_0)$$

$$\frac{dL}{dt}=Q(t)-S(t)$$

$$S(t)=500-40P-10\frac{dp}{dt}$$

$$Q(t)=250-5P$$

其中 $P(t)$ ＝ 商品價格
$S(t)$ ＝ 預測銷量
$Q(t)$ ＝ 生產水平
$L(t)$ ＝ 存貨水平
Lo ＝ 最佳水平
k ＝ 正常數

利用微分法，學生不難獲得

$$\frac{d^2P}{dt^2}=-k\frac{dL}{dt}=-k(Q(t)-S(t))$$

$$=-k(-250+35P+10\frac{dp}{dt})$$

或 $$\frac{d^2P}{dt^2}+10k\frac{dP}{dt}+35kP=250k$$

內容	時間分配	教學建議

4. *兩城人口增長問題*

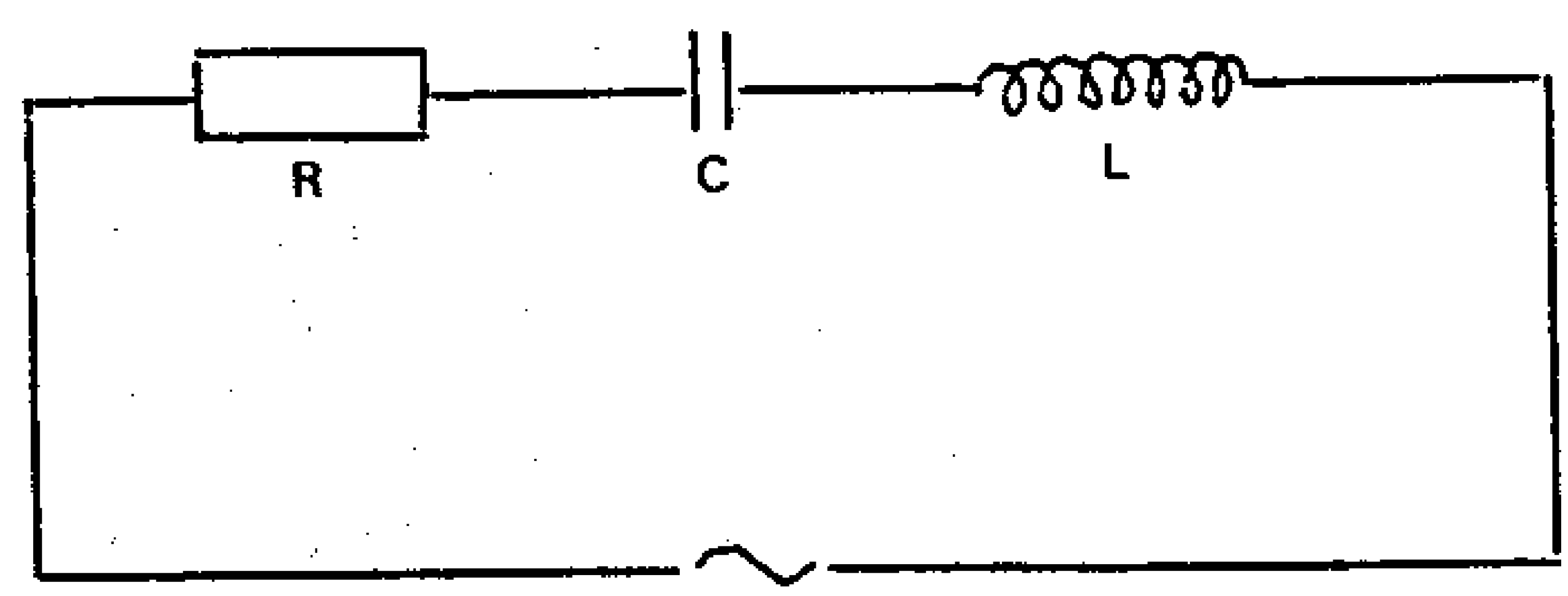
設二城A和B的自然人口增長率為每年λ%，每年移民率由A城至B城的是a%而B城至A城的則是b%。若該二城之原本人口個數分別為N_1及N_2，則t年之後，該二城的人口個數(分別以$x(t)$及$y(t)$表示)可由$\frac{dx}{dt}=\frac{\lambda x}{100}-\frac{ax}{100}+\frac{by}{100}$及$\frac{dy}{dt}=\frac{\lambda y}{100}-\frac{by}{100}+\frac{ax}{100}$求得。(此組方程可簡化為二階微分方程。)

5. *電路*

若學生已學習電感及電容的概念，教師可引用有關電路的例子來增加他們的興趣。眾多有關方程中其中一則是

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E_0\,\omega\cos\omega t$$

其中R、C及L串聯。



$E(t)=E_0\cos\omega t$