單元 14：插值法及拉格朗日插值多項式

特定目標：

1. 學習插值法的概念。
2. 學習拉格朗日插值多項式。
3. 應用拉格朗日插值多項式逼近函數及估計誤差。

內容	時間分配	教學建議
14.1 插值法及插值多項式	1	學生應要認識插值的意義。
14.2 拉格朗日插值多項式的構造	3	作為引入，教師可展示拉格朗日插值多項式 $p_n(x)$ 在 $n=1$ 的情形。以下的圖解可幫助學生了解插值法的實際意義。

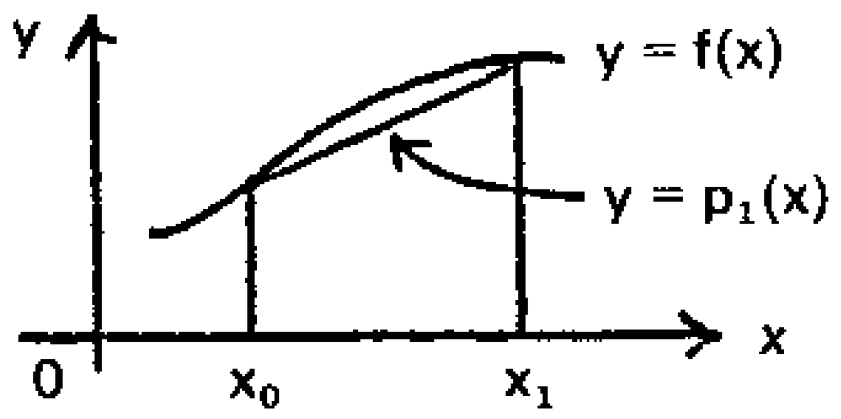
學生應要認識插值的意義。

插值法是利用自變量 x_0，x_1，………x_n 上的函數值 $f(x_0)$，$f(x_1)$，………$f(x_n)$ 估計函數在 x_0，x_1，………x_n 之間的數值。

學生應知道多項式逼近函數是數值法最常用的一種。利用多項式 $p(x)$ 替代函數 $f(x)$ 是因為多項式容易計算，它只涉及整數冪；而其導數及積分本身又為多項式，並不難求得；況且多項式方程的根亦很容易確定。

14.2 拉格朗日插值多項式的構造（時間分配：3）

作為引入，教師可展示拉格朗日插值多項式 $p_n(x)$ 在 $n=1$ 的情形。以下的圖解可幫助學生了解插值法的實際意義。



學生應了解他們只是要求利用 $p_1(x)=a_1x+a_0$ 於 x_0 及 x_1 之間逼近曲綫 $y=f(x)$。

明顯地，$p_1(x_0)=f(x_0)$，$p_1(x_1)=f(x_1)$ 及 $p_1(x)=a_1x+a_0$。

內容	時間分配	教學建議

所以 $p_1(x)-a_1x-a_0=0$

$f(x_0)-a_1x_0-a_0=0$

$f(x_1)-a_1x_1-a_0=0$

消去 a_0 及 a_1 後可獲得

$$p_1(x)=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\text{。}$$

同樣地，教師可利用類似上圖進行推導二次拉格朗日插值多項式及得到

$$p_2(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\text{。}$$

以類似的方法教師可以推導三次多項式。為了學生的興趣，教師也可以引入「拉格朗日乘數函數」。

最後教師可幫助學生引出 $p_n(x)$，$n=1,2,3$ 的次數是 n 及在 $n+1$ 個表列點 x_i 上，$p_n(x_i)=f(x_i)$ 的結論，但不須要將其引伸至一般情況。

14.3 拉格朗日插值多項式的應用（時間分配：2）

教師應展示拉格朗日插值多項式的應用例子。

例一

下表列出在 0, 1, 2, 4 點上的四個函數值。

x_k	0	1	2	4
y_k	1	1	2	5

教師可要求學生證明三次拉格朗日插值多項式為 $p_3(x)=\frac{1}{12}(-x^3+9x^2-8x+12)$。更可要求他們計算介乎 $x=0$ 及 $x=4$ 間的一些函數值。

例二

利用下表之數據

v	10	15	22.5	33.75	50.625	75.937
p	0.300	0.675	1.519	3.417	7.689	17.300

內容	時間分配	教學建議
		學生可應用不同次的拉格朗日插值多項式計算對應 $v=21$ 的 p 值。（當 $n=1$，$p=1.350$ 及當 $n=2$，$p=1.323$），通過這例子，學生應能了解利用相同數目但不同的鄰近點也會得出不同的結果。 作為進一步的說明，一些常用函數如正弦及餘弦函數是值得作為課堂上示範的。教師可要求學生將利用拉格朗日插值多項式估計的中間函數值與由計算機算得的數值作一比較。教師亦可舉出一些實際例子如經濟走勢圖表及人口數據表並要求學生估計其中缺掉的一些數據。
14.4 插值多項式的誤差估計	3	在此階段，教師應提醒學生拉格朗日插值多項式只是多項式插值法的一種，實際上還存在其他插值方法。對一些能力高的學生，教師可與他們討論插值多項式的唯一性。 在開始討論誤差估計時，教師可引入函數 $\pi(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，並以之用作表達 $f(x_i)$ 的系數 $\frac{\pi(x)}{(x-x_i)\pi'(x_i)}$，因而給出拉格朗日插值多項式的簡潔式如下： $p_n(x)=\sum_{i=o}^{n} f(x_i)\frac{\pi(x)}{(x-x_i)\pi'(x_i)}$, $n=1, 2, 3$。 將誤差定義為 $e(x)=f(x)-p_n(x)=C\pi(x)$ 其中 C 為常數，由此建立函數 $F(x)=f(x)-p_n(x)-C\pi(x)$，選擇 $x=\bar{x}$（其中 $x_0\leqslant\bar{x}\leqslant x_n$ 及 $\bar{x}\neq x_i$，$i=0,1,2,3$），教師可引導學生重覆應用洛爾定理而達至 $e(x)=\frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E})}{(n+1)!}\pi(x)$，其中 $\mathcal{E}$ 位於表列區間之內。 學生應了解若 $\mathcal{E}$ 在包含表列點的區間內及 $f^{(n+1)}(\mathcal{E})$ 有上限，如 $M=\mathrm{Max}\left\lvert f^{(n+1)}(\mathcal{E})\right\rvert$，則絕對誤差為 $\lvert e(x)\rvert\leqslant\left\lvert M\frac{\pi(x)}{(n+1)!}\right\rvert$。 教師應提供示範的例子，以下是其中的一個。

內容	時間分配	教學建議
		例 給出函數 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ 的函數表。 $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline x_k & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_k & 1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ 教師可要求學生証明 $\lvert e(x)\rvert\leqslant\left\lvert\frac{\pi^3}{8}x(x-1)(x-2)\right\rvert$，然後計算在 $x=0.5$ 時的估計值及與真實誤差作一比較。
	9	