單元 16：數值積分

特定目標：

1. 學習梯形法則及森遜法則。
2. 應用梯形法則及森遜法則於數值積分及估計其誤差。

<table>
<tr><th>內容</th><th>時間分配</th><th>教學建議</th></tr>
<tr><td>16.1 數值積分</td><td>1</td><td>數值積分的重要性可以從應用數學問題經常涉及導數而體會得到，而這些問題的解答亦很自然地涉及積分。學生應了解到大部分積分是不能以初等函數表示的，因此有必要估計積分值。例如很難用解析方法，求積分 $\int\frac{\sin x}{x}dx$ 及 $\int e^{-x^2}dx$ 的。

學生應知道多項式的逼近拉格朗日插值多項式方法是梯形法則及森遜法則這兩條積分公式的基礎。其主要觀念是若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的逼近函數，則 $\int_a^b p(x)\,dx\approx\int_a^b f(x)\,dx$。</td></tr>
<tr><td>16.2 梯形法則
(a) 梯形法則的推導</td><td>6</td><td>一個引起學生學習梯形法則動機的方法是求諸這方法的幾何性質，即以一系列的梯形去逼近問題內的面積。利用一個已知的定積分如 $\int_1^2 x^2\,dx$ 可清楚說明若用足夠數目的梯形，梯形法則可以計算得很好及給出很高的準確性。學生應很容易推導出用 n 個梯形對定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的梯形法則是
$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{w}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+\cdots\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$
$$=\frac{w}{2}[f(x_0)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_n)+f(x_n)]$$
其中 $x_0=a, x_n=b$ 及 $w=\frac{b-a}{n}$。

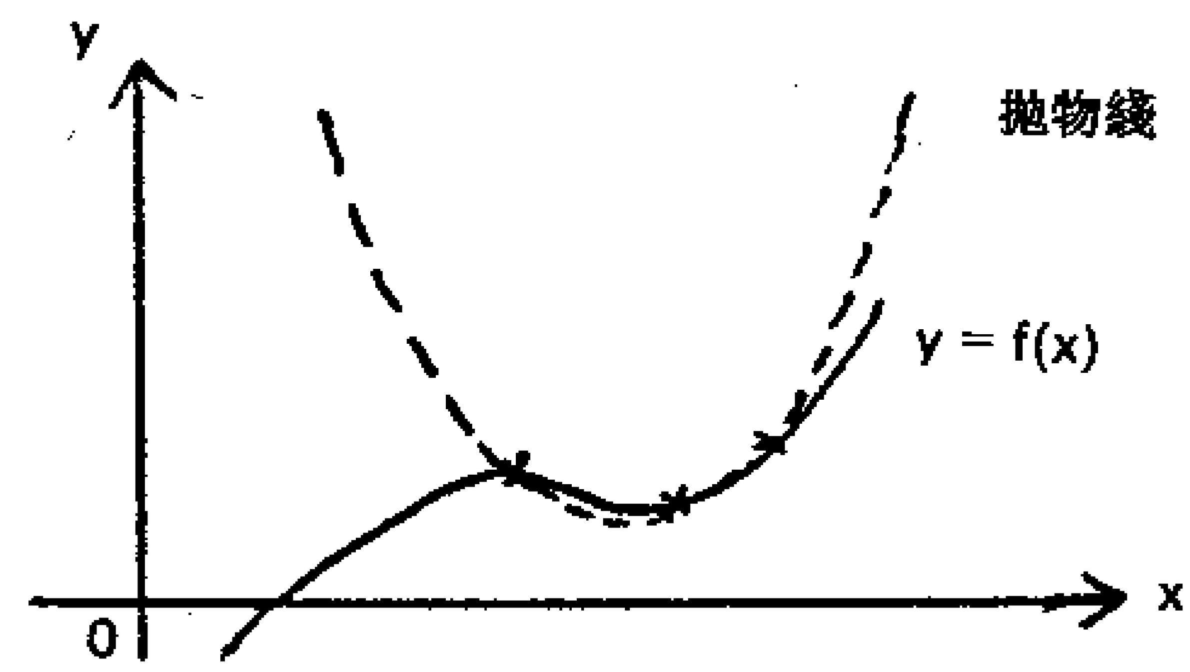
另外，梯形法則也可在每一區間中以綫性插值法推導出來。例如在子區間 $[x_0,x_1]$ 中</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>內容</th><th>時間分配</th><th>教學建議</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx\approx\int_{x_0}^{x_1} p(x)\,dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right]dx$$
$$=\frac{w}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$ 而 $w=x_1-x_0$。
將所有子區間的面積加起來，學生就能得出如上的梯形法則公式。</td></tr>
<tr><td>(b) 誤差的估計</td><td></td><td>學生應留意以梯形法則求一已知函數的積分的準確性。教師可引導學生用以下的方法推導最大的誤差。

考慮梯形法則積分的第 i 個介乎 x_{i-1} 及 x_i 的梯形，兩點的距離為 $w=\frac{b-a}{n}$。假設 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函數，教師可要求學生給出積分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\ (=F(x_i)-F(x_{i-1}))$ 的準確值及計算值 $(=\frac{w}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)])$。定義這個梯形的誤差是 $E_i=\frac{w}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]-[F(x_i)-F(x_{i-1})]$。應用泰勒展開式在 x_i 展開 $f(x_{i-1})$ 和 $F(x_{i-1})$，學生應可發現 $E_i\approx\frac{w^3}{12}f''(\mathcal{E}_i)$，把所有的子區間的誤差加起來，可得
最大總誤差 $=|E_T|=(b-a)\frac{w^2}{12}M$，其中 $M=\max|f''(\mathcal{E})|$ 而 $\mathcal{E}$ 在積分範圍內。</td></tr>
<tr><td>(c) 梯形法則的應用</td><td></td><td>教師應該強調梯形法則的應用。常見例子如面積、可變力的作功及質點以給定速度運行的距離，皆可向學生加以說明。以下是一些可行的例子。

例一
在下表中列出的是一條曲綫上的一些點。(t是進行時間，v是速度)。教師可要求學生計算 $t=0$ 至 $t=4.0$ 所行的距離。
<table><tr><td>t(h)</td><td>0</td><td>0.5</td><td>1.0</td><td>1.5</td><td>2.0</td><td>2.5</td><td>3.0</td><td>3.5</td><td>4.0</td></tr><tr><td>v(kmh^{-1})</td><td>23</td><td>20</td><td>15</td><td>11</td><td>12.5</td><td>15</td><td>18</td><td>20</td><td>22</td></tr></table>
例二
利用梯形法則及四個等距的縱坐標估計 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$ 的值。答案準確至三位有效數字。</td></tr>
</table>

內容	時間分配	教學建議
		例三 計算 ln2 準確至小數後四個位需要多大的區間 w？ *例四* 利用梯形法則計算積分 $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ 準確至 0.001 並與真值核對答案。
16.3 森遜法則 (*a*) 森遜法則的推導	6	教師可用二次拉格朗日插值多項式推導森遜法則，唯應強調其幾何意義。學生應發覺用一系列的拋物綫段逼近函數 $y=f(x)$ 一般來說比用直綫更能緊密配合。



內容	時間分配	教學建議
		教師可引領學生利用 2n 條條子推導森遜法則 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{w}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+f(x_{2n})\right]$ 其中 $x_0=a$, $x_{2n}=b$ 及 $w=\frac{b-a}{2n}$。 教師應提醒學生應用森遜法則時的子區間必定是雙數，但梯形法則沒有限制的。
(*b*) 誤差的估計		與梯形法則相似，森遜法則的截斷誤差亦可用泰勒展開式導出，而誤差的假設就如以往一樣。在教師的輔導下導出最大誤差項

內容	時間分配	教學建議
		$\lvert E_T\rvert=(b-a)\frac{w^4}{180}M$ 其中 $w=\frac{b-a}{2n}$ 及 $M=\max\lvert f^{(4)}(\varepsilon)\rvert$ 而 ε 在積分範圍內，對學生來說雖然比較繁複，但亦不太困難。
(*c*) 森遜法則的應用		基本上，應用問題的類形與梯形法則的相似。在這裏要強調的不單在應用技巧本身，並應比較兩公式的準確程度。下面是兩個例子。 *例一* 利用森遜法則計算積分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\cos x)\,dx$。計算最少的條數數目使誤差少於 10^{-6}。 *例二* 利用梯形法則及森遜法則計算積分值 $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$ 並與真正結果比較其準確性。
	13	