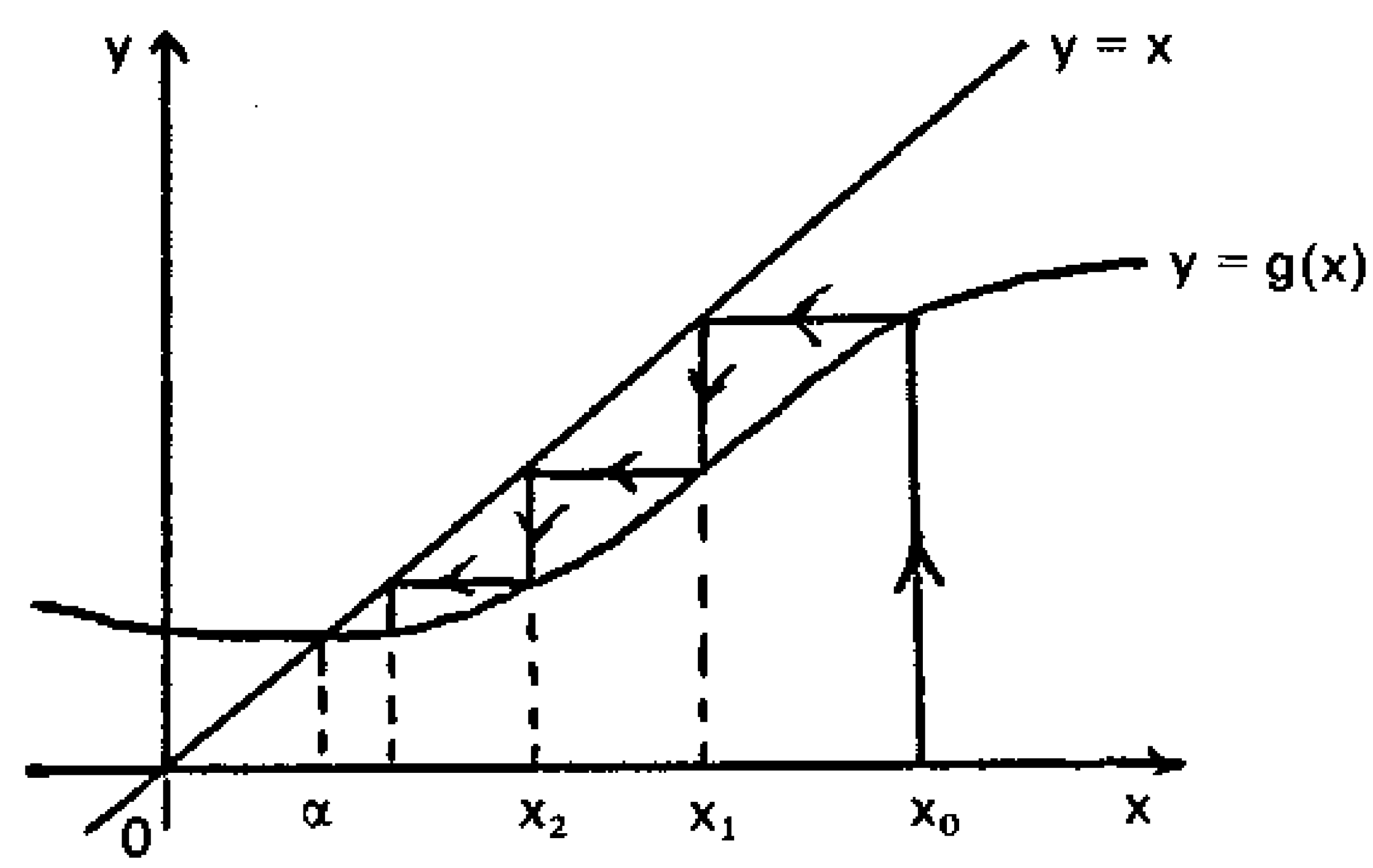
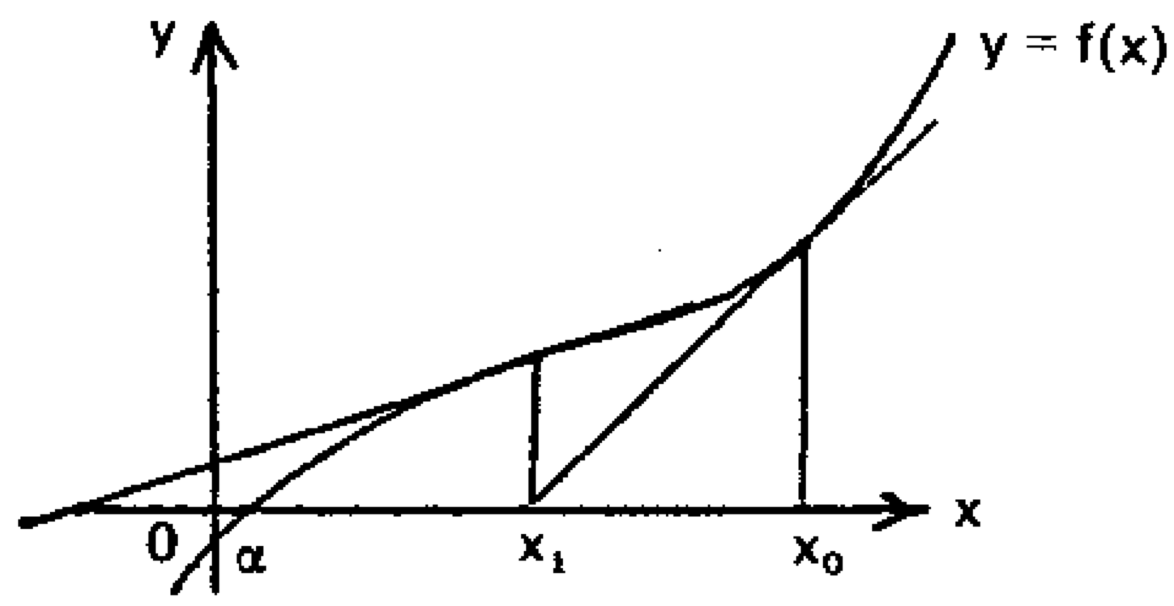
單元 17：方程的數值解

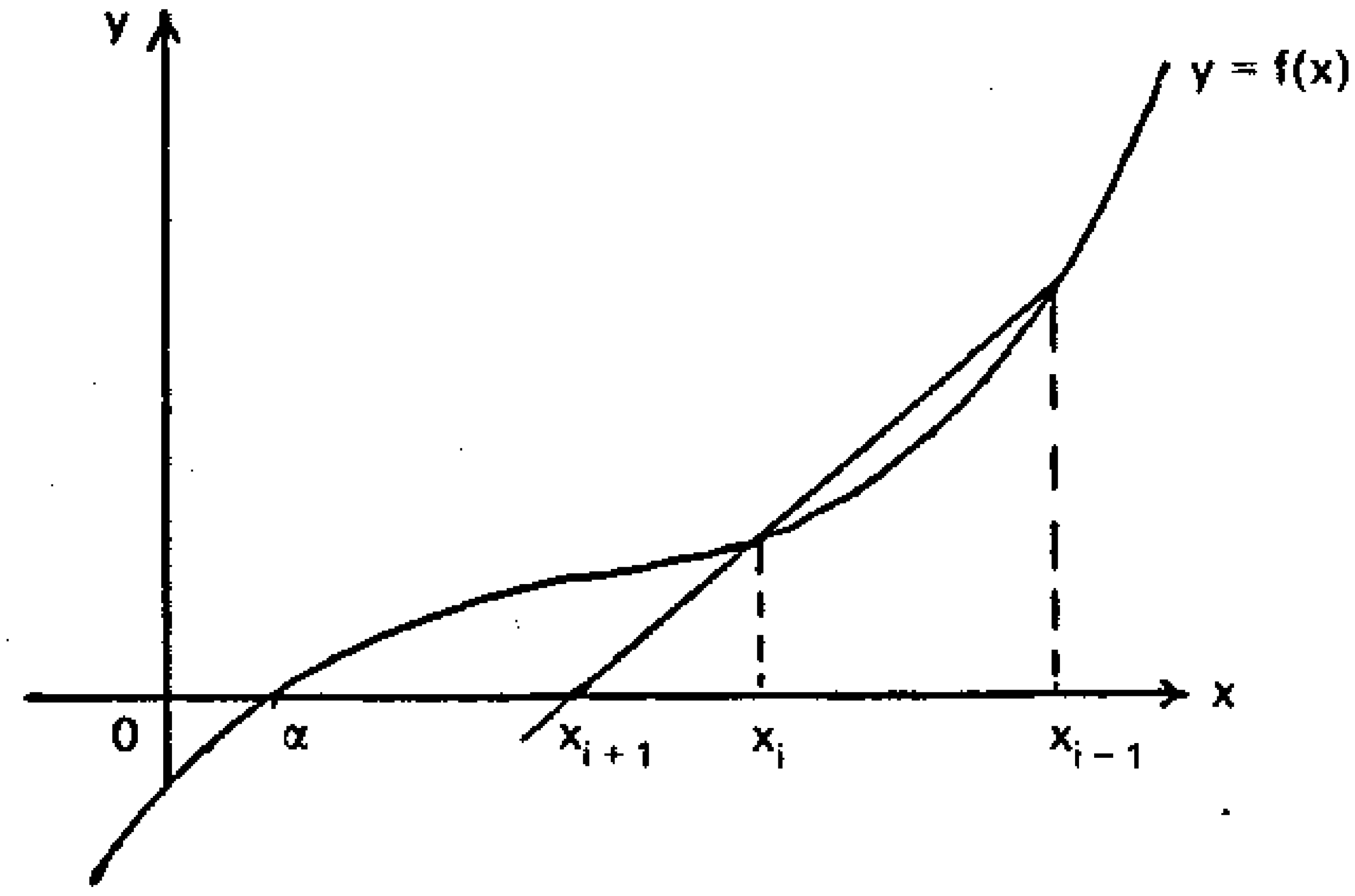
特定目標：

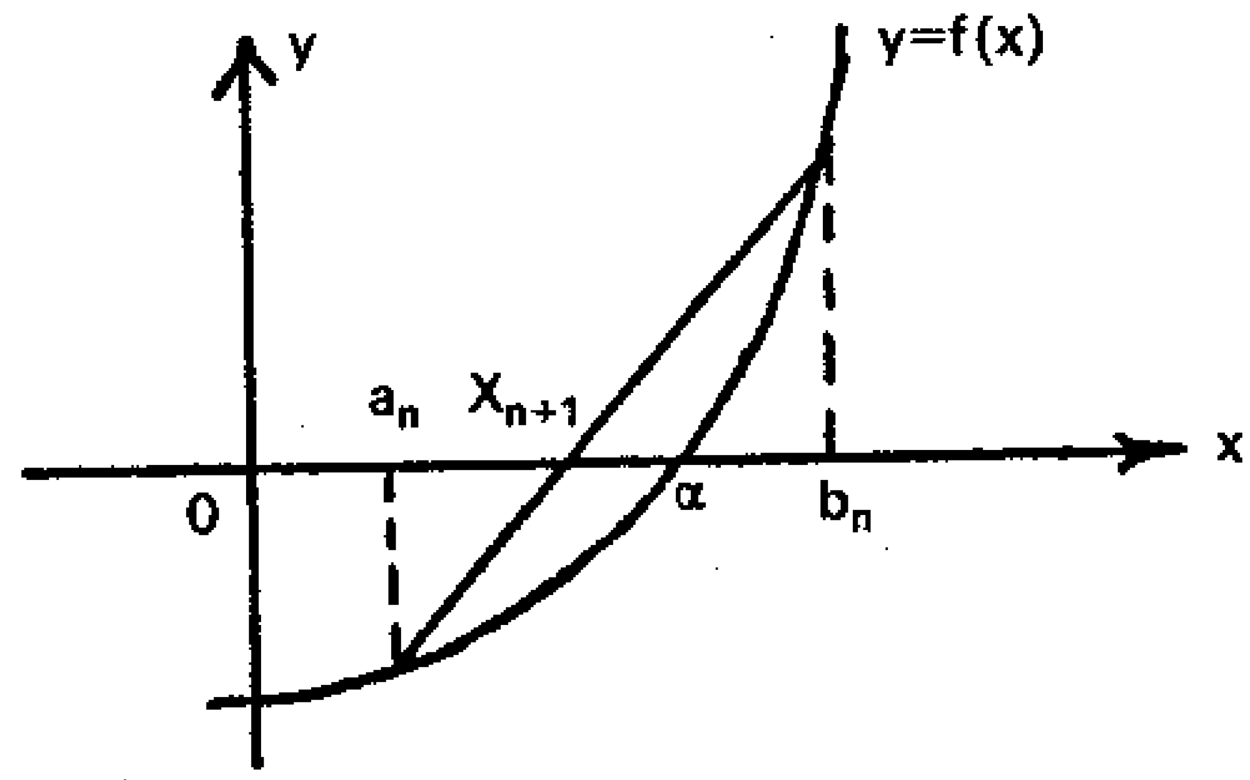
1. 學習定點迭代法、牛頓方法、正割法及試位法。
2. 學習應用適合的方法尋找方程近似根的技巧及計算其誤差。

內容	時間分配	教學建議
17.1 定點迭代法		
(*a*) 迭代法的算法	7	學生應了解應用這方法時的幾個步驟。 1. 把方程 $f(x)=0$ 重新整理成 $x=g(x)$ 的形式而 $g(x)$ 稱為迭代函數。 2. 當須要時基於適當的圖形草圖作出初始估值 x_0。 3. 代入方程如下，由此得到數列 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, \cdots \alpha$ $x_1=g(x_0)$ $x_2=g(x_1)$ $x_3=g(x_2)$ $\vdots \quad \vdots$ $\vdots \quad \vdots$ $x_i=g(x_{i-1})$ $x_{i+1}=g(x_i)$ $\vdots \quad \vdots$ 希望得到一個定點 α 使 $\alpha=g(\alpha)$。 4. $f(x)=0$ 的近似解便是定點 α。 教師可以一些有收斂的迭代函數及有適當的初始估值的方程來說明此方法。教師並應與學生討論這個方法的幾何意義。

內容	時間分配	教學建議
		
(*b*) 收斂的條件		利用一個如 $x^2-5x+4=0$ 及 $g(x)=\dfrac{x^2+4}{5}$ 的迭代函數作為例子，教師可要求學生以 $x_0=2$ 及 5 為初始估值求解。學生應求出若 $x_0=2$，他們求出的根近於 1，但若 $x_0=5$，求解的過程是散發的。因此討論收斂性變得很自然了。這裏很值得討論單調及振動收斂和散發性的幾何意義，但數學處理方面則只須簡要地提及。 收斂性的數學處理，一般必須利用中值定理。學生應知道應用定點迭代算法必須符合下列各點。 1. $g(x)$ 在區間 $I=[a, b]$ 內所有 x 點上有定義及 $g(x)$ 在 I 內。 2. 迭代函數 $g(x)$ 在 I 上是連續的。 3. 迭代函數 $g(x)$ 在 I 上是可微分的及對所有在 I 內的 x 來說，存在一個實數 K 使得 $\|g'(x)\| \leqslant K<1$。 教師可以舉出類似以下的證明練習。 *例* 給出 $x=g(x)$ 有一個準確解 α 在 $[a, b]$ 內及對所有 x 在 $[a, b]$ 內有 $\|g'(x)\| \leqslant K$。進一步假設 $x_{n+1}=g(x_n)$ 其中 $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$。教師可要求學生証明 $\|x_{n+1}-\alpha\| \leqslant K^{n+1}\|x_0-\alpha\|$ 及推出若 $K<1$，數列 $\{x_n\}$ 收斂於 α。

內容	時間分配	教學建議
(*c*) 誤差的估計		教師應與學生討論及推導第n個近似解x_n的誤差$\mathcal{E}_n$，其中 $\mathcal{E}_n=\lvert x_n-\alpha\rvert\le\frac{K^n}{1-K}\lvert x_1-x_0\rvert$。 從式中可以看出當K越小，收斂速率越快。對能力較高的學生，教師可利用在定點α以泰勒展開式展開誤差$\mathcal{E}_{n+1}=g'(\alpha)\mathcal{E}_n+g''(\alpha)\frac{\mathcal{E}_n^{\ 2}}{2!}+g'''(\alpha)\frac{\mathcal{E}_n^{\ 3}}{3!}+\cdots\cdots$，並與他們討論迭代法的收斂階，但不應嘗試用嚴格的數學處理方法。
17.2 牛頓方法		
(*a*) 牛頓方法的算法	5	教師可以用幾何方法推導此算法。  此外，亦可以利用泰勒展開式在x_n點展開$f(x_{n+1})$而推導得 $f(x_{n+1})=f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f''(x_n)\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{2!}+\cdots\cdots$。當$x_{n+1}\to\alpha$及$x_{n+1}-x_n\to 0$，學生應得出$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$。學生必須知道牛頓方法事實上是定點迭代法的一個特例。
(*b*) 收斂條件及誤差計算		牛頓方法的收斂條件與一般定點迭代法是相同的。比較牛頓方法與一般定點方法的收斂率是一個有趣的討論題目。學生不難發覺若α是一個單根，則$g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$及$g'(\alpha)=0$，和$\mathcal{E}_{n+1}\approx g''(\alpha)\frac{\mathcal{E}_n^2}{2!}$。牛頓方法比其他方法超越的例子是應該列舉的。以下是一個例子。

內容	時間分配	教學建議
		例 用迭代公式$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1-x_n^{\ 3})$求方程$x^3+2x-1=0$在區間[0, 0.8]內的根。教師可要求學生用初始值$x_o=0$去求α，然後再用牛頓方法重做此問題。最後要求學生說明後者的收斂速度比前者快。 明瞭「若α是重根，則牛頓方法並不快速收斂」這一事實對學生是有裨益的。要使學生對牛頓方法作更全面的學習，教師應與學生討論此方法的缺點。
(*c*) 牛頓方法的應用		高於2次的高次方程和超越方程的問題是切合課程的。例如求方程$2x^3+x^2-20x+20=0$在$x=0$和$x=1$之間的根準確至10^{-6}及推導求a的第k個根的牛頓式$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^{\ k}-a}{k\,x_n^{\ k-1}}$是一般常用的問題。
17.3 正割法	2	正割法是求$f(x)=0$的根的另一方法。它的收斂速度與牛頓方法差不多，但迴避了導數f(x)的計算。此方法是用割綫取代了切綫。
(*a*) 正割法的推導		此方法的算法推導是近似於牛頓方法般借助於幾何直觀。 

內容	時間分配	教學建議
		類似的公式是 $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$，而其中以割綫的斜率 $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ 代替切綫的斜率 $f'(x)$。 學生應看出割綫方法是需要兩個初始估值而它們的函數值是不需要是異號的。 這裏並不需要進一步處理誤差估計和收斂速率，但若計算時需要，則有關的公式亦應在問題中給出。
(*b*) 正割法的應用		練習與牛頓方法的相似。
17.4 試位法	2	這也是一個求方程 $f(x)=0$ 在區間 $[a, b]$ 內的根的方法。此法與分半法(學生已在中五時學習)相似的地方是兩方法皆能確定更小的含根區間，同時試位法與正割法在求新的迭代值方面也十分相似。
(*a*) 試位法的推導		假設方程 $f(x)=0$ 在區間 $[a_n, b_n]$ 內有根及利用下圖  教師可引導學生計算連接兩點 $(a_n, f(a_n))$ 及 $(b_n, f(b_n))$ 之直綫的 x 軸截距。若設 x 軸截距值為 x_n+1，學生會發現 $x_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$ 或 $x_{n+1}=b_n-\frac{f(b_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$。

內容	時間分配	教學建議
		學生可依據下列情況 (1) 若 $f(x_{n+1})\cdot f(a_n)<0$，則令 $a_{n+1}=an$ 及 $b_{n+1}=x_{n+1}$， (2) 若 $f(x_{n+1})\cdot f(a_n)>0$，則令 $a_{n+1}=x_{n+1}$ 及 $b_{n+1}=b_n$ 去決定新的含根區間，他們便很容易完成該算法的推導。
(*b*) 試位法的應用		教師應提醒學生試位法需要兩個初始值及在這兩個初始值上的函數值必為異號，才能應用試位法。類似牛頓方法及正割法的練習也適合作為試位法的練習。下面是一些例子。 *例一* 證明方程 $x^3+3x-12=0$ 在區間 $[1, 2]$ 內有唯一根並利用試位法求此根，答案準確至三位小數。 *例二* 現用試位法求方程 $x^3=2\times+5$ 在區間 $[2, 3]$ 內的根。 證明迭代值序列 $\{x_i\}$ 的公式為 $x_{i+1}=3-\frac{16x_i-48}{x_i^3-2x_i-21}\qquad i=1, 2, 3, \ldots$ 由此，求此根，準確至四位有效數字。 如教授正割法一樣，教師不宜與學生討論深入的收斂及誤差估計問題。
	16	