# 單元 18：初級概率理論

***特定目標：***

1. 認識概率在日常生活中的用處及其重要性。
2. 學習概率的基本定律及其在實際情況的應用。

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | 學生雖然對本範疇部分基本概念已有認識，但因此等概念十分重要，故此教師亦應與學生重溫及鞏固這些知識。 |
| **18.1 基本定義**<br>樣本點、樣本空間、等概率空間、事件的概率 | 3 | 學生應已熟悉概率樣本空間及事件的意義，但可能對樣本點不大認識，故此，教師可討論一些如擲毫等的例子，籍此說明實驗中之樣本空間不是唯一的。例如，擲三枚硬幣時，其中兩個可能樣本空間是：<br>{(H, H, H)，(H, H, T)，(H, T, H)，(H, T, T)，(T, H, H)，(T, H, T)，(T, T, H)，(T, T, T)} 及 {全部反面，一正面，二正面，三正面}<br><br>教師應闡述等概率空間的意義。在上述的例子中，前者是等概率空間，而後者卻不是。以下是另一例子：<br><br>***例***<br>甲每天都要外出工作，他可能會遇到交通意外而喪生；不過，他遇到交通意外而喪生的機會不等於 $\frac{1}{2}$，因為兩個結果(喪生及不喪生)的發生機會並不均等。<br><br>當學生對此概念清楚後，教師便可引導他們覆述概率的定義：<br>$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$ 其中 E 是事件，S 是等概率空間<br><br>教師應要強調 $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$，並討論必然發生 $(P(E)=1)$ 及不可能發生的事件 $(P(E)=0)$。 |



| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| **18.2 計數法** | 5 | 教師應介紹不同的計數法，籍以運算可能結果的總數。乘法原理是其中一種，方法如下：<br>$n_1$ 元素 $a_1$，…………，$a_{n_1}$<br>$n_2$ 元素 $b_1$，…………，$b_{n_2}$<br>⋮<br>$n_r$ 元素 $x_1$，…………，$x_{n_r}$<br>$(a_{j_1}$，……，$x_{j_r})$ 共有 $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots\ldots n_r$ 種不同依次組合方式。<br><br>***例***<br>在某中學內，學生按其性別，年齡及所屬學社被分類。假如該校有四個學社及五個年齡組別，於是共有 $2\times4\times5$ 組 $=40$ 組。<br><br>其他計數法包括組合、排列及其有關的公式如<br>$P^n_r=\frac{n!}{(n-r)!}$，$C^n_r=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}$，<br>$C^n_r=C^n_{n-r}$ 及 $C^n_r+C^n_{r+1}=C^{n+1}_{r+1}$<br>亦要清楚討論。教師應強調組合與排列的分別。為了加深學生對計數法的認識，教師可引用更多的例子，如計算隨意把 n 個球放在 n 個盒中而每一盒都有球的概率及贏取六合彩各種獎項的概率。<br><br>這裏只要求學生能掌握組合及排列的基本技巧，並籍以解決一些簡單問題。教師不必花費過多精力去作深入研究。<br><br>對一些能力較高的學生，教師可討論以下公式：<br>在 n 個元素中，其中 $p_1$ 個元素(第一類)是相似的，$p_2$ 個元素(第二類)是相似的，………$p_k$ 個元素(第 k 類)是相似的，由此，它們可依次以 $\frac{n!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_k!}$ 方法排列。<br><br>教師並可與學生討論其它應用，如「簡單超幾何概率」，但學生無須認識這個術語。日常生活例子如品質檢驗問題和估計水池中魚兒的數量等，亦可討論。下列是其中兩個例子。 |

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | *例一*<br>一批貨品內有 n 台錄影機，其中 r 台是次貨，現隨機抽出 p 台作檢驗 ($r<n$ 及 $p<n$)；在這裏可要求學生計算有 q 台次貨的概率 ($q<r$ 及 $q<p$)。<br>同樣地，教師亦可要求學生算出當 $n=80$，$r=10$ 及 $p=15$ 時最少有兩台次貨的概率。<br>*例二*<br>一水池有魚 N 尾，從中捕捉了 r 尾，並於每尾身上加上記號，然後將它們放回池中；待池中所有魚兒混在一起後，再捕捉 r 尾魚，要計算在第二次的捕魚樣本中有 n 尾是有記號的概率並不困難。再者，教師可引導學生找出水池中魚兒的約數。 |
| **18.3 概率定理**<br>加法和乘法定律<br>互斥事件<br>獨立事件<br>條件概率 | 3 | 學生學習互斥事件及獨立事件的定義應該沒有任何困難，而相對的加法及乘法定律即 $P(E\cup F)=P(E)+P(F)$ 及 $P(E\cap F)=P(E)P(F)$ 亦應討論。一些典型的例子，如擲毫、抽球及擲骰等，均可幫助學生重溫此等概念。<br>教師應引用例子，教導學生條件概率的意義及記號。<br>教師現可介紹非獨立事件及非互斥事件。加法及乘法的定律依次變成 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 及 $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)$。<br>$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cdots\cap E_n)$ 的一般公式亦可討論。教師亦可提出 A、B 是兩個獨立事件當且僅當 $P(A\mid B)=P(A)$ 或 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。<br>在處理那些只有有限結果的應用題時，樹形圖可有效地列出所有可能的結果。教師更應舉例，以顯示法則的應用。以下是其中一些例子：<br>*例一*<br>甲袋中有 4 個紅球及 6 個黑球，乙袋中有 6 個紅球及 4 個黑球。現從甲袋中隨機抽出一球（第一球），放在乙袋中，混合後又從乙袋中隨機抽出一球（第二球），放在甲袋中，最後在甲袋中抽出一球（第三球）。<br>在此例中，教師可要求學生計算第 i 個球是紅色的概率（i 等於 1, 2, 3）。教師亦可提醒學生使用樹形圖劃出所有可能的結果。 |



| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | *例二*<br>志強可在週末（星期五、六、日）在家中會見朋友。假設美玲在星期五探望志強的概率是 $\frac{1}{q}$，在往後的兩天裏，如果她在前一天已探望過志強，她再去的概率是 $\frac{1}{m}$；如果她在前一天未探望過志強，她去的概率是 $\frac{1}{n}$。<br>在此例中，可行的問題包括計算美玲星期日去探望志強的概率及計算 $P(B\mid A)$ 及 $P(B\mid \overline{A})$ 其中 A 代表美玲星期五去探望志強，而 B 代表美玲星期日去探望志強。<br>教師可引導學生使用樹形圖找出所有可能的結果。 |
| **18.4 貝葉斯定理** | 4 | 學生熟習了條件概率後，教師可開始闡釋貝葉斯定理如下：<br>設 Ω 樣本空間分割為 $A_1\cdots\cdots A_n$ 互斥事件，並設 B 為另一事件而 $P(B)\neq 0$<br>$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)}$$<br>學生並不需要推證貝葉斯定理，所以教師可引用一些數例，籍以解釋當中的術語。解決有關貝葉斯定理的問題，樹形圖是常用的方法。以下是其中一個例子：<br>*例*：<br>三個罐分別放有 6 個黑球及 9 個白球，12 個黑球及 3 個白球，8 個黑球及 7 個白球。現隨機選取一罐並從中抽球一個。<br>教師可要求學生劃出樹形圖，及討論如何求得黑球的概率。之後，學生應沒有任何困難求出 $P$(從第二個罐抽得的球 $\mid$ 黑球)的值。 |
| **18.5 遞推關係** | 4 | 教師須幫助學生認識先後事件相關的情況。學生應懂得列出公式，連起先後發生的事件的概率。以下的例子可幫助學生了解遞推的概念：<br>*例一*：<br>市面上有兩種新牌子的汽水。由於包裝不同，某甲選擇 X 汽水的概率為 0.55，選擇 Y 汽水的概率為 0.45。假設她每天只飲其中一種汽水，如果她昨天飲過 X，今天飲 X 的概率 |

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
| --- | --- | --- |
| | | 是0.6，而飲Y的概率是0.4。相反地，如果她昨天飲的是Y，今天飲X的概率是0.3，而飲Y的概率是0.7。<br><br>在此例中，樹形圖可用來顯示$P_{n-1}$，$1-P_{n-1}$，$P_n$及$1-P_n$的相互關係（$P_n$是她在第n天飲X的概率），由此，學生可輕易以$P_{n-1}$表$P_n$，他們亦能以$P_1$及n來表$P_n$。學生可能有興趣知道X汽水最終所佔市場的比例為$\lim_{n\to\infty} P_n$。<br><br>*例二*<br>由一個裝有4個白球及9個黑球的袋中，抽出一球，然後將它放回袋中，如是者重覆n次。$Q_n$是不會連續兩次抽出黑球的概率。教師可教導學生找出$Q_n$、$Q_{n-1}$及$Q_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$的關係，亦可要求學生寫出$Q_1$、$Q_2$及$Q_3$，然後計算$Q_4$、$Q_5$……。<br><br>教師無須教授馬可夫鏈及差分方程。 |
| | 19 | |