單元 21：統計推論

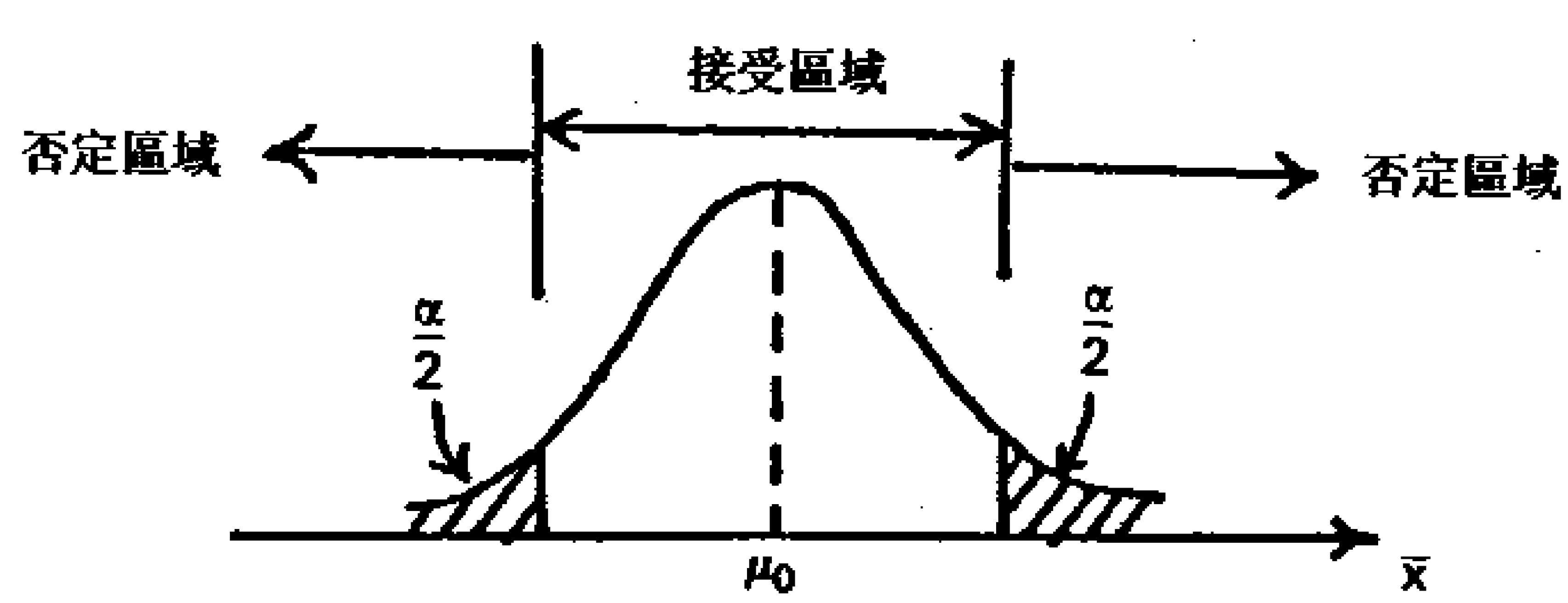
特定目標：

1. 從一隨機樣本中估計總體的平均值。
2. 認識一已知方差的常態分佈的總體平均值的置信區間。
3. 認識I型及II型誤差。

內容	時間分配	教學建議
21.1 基本概念	4	教師須介紹以下名詞：總體、樣本、隨機樣本、總體參數及樣本統計等。 *例一* 某種植物的高度為常態分佈，平均值為 20 cm，標準差為 8 cm。學生應知道一包含 10 棵該種植物隨機樣本的平均值亦為一正態分佈，且平均值為 20 cm，標準差為 $\frac{8}{\sqrt{10}}$cm。 *例二* 已知3%的燈泡會在運送途中損毀。現運送1 000個燈泡，求多於5%的燈泡損毀的概率。在這個例子中教師可引導學生考慮損毀燈泡的數目X。而X是一二項分佈，即 $X \sim B(1\,000,\ 0.03)$。這分佈近似常態分佈，即 $X \sim N((0.03)(1\,000),\ (1\,000)(0.03)(0.97))$。學生不難理解所求的概率等於 $P(X>49.5)$。另外，教師亦可引用樣本比例的概念： $P_s=\frac{x}{n}$，它的分佈近似 $P_s \sim N(p, \frac{pq}{n})$，其中 $q=1-p$。 此時所求概率等於 $P(P_s \geqslant 0.0495)$。
21.2 利用隨機樣本估計總體平均值	5	在這階段，教師應介紹利用樣本統計去估計總體未知參數的概念，教師可舉例作示範：例如利用樣本平均值 $\bar{x}$ 去估計總體平均值 μ 等。教師須指出，同樣的參數可有不同的樣本統計作估計量。例如樣本平均值、中位數和眾數等，均可用作總體平均值的估計量。因此，學生須知道，估計總體參數 (β) 的估計量很多，但最佳估計量 (b) 須具備以下兩個條件： 1. 無偏性，即 $E(b)=\beta$ 及 2. b的方差為最小。

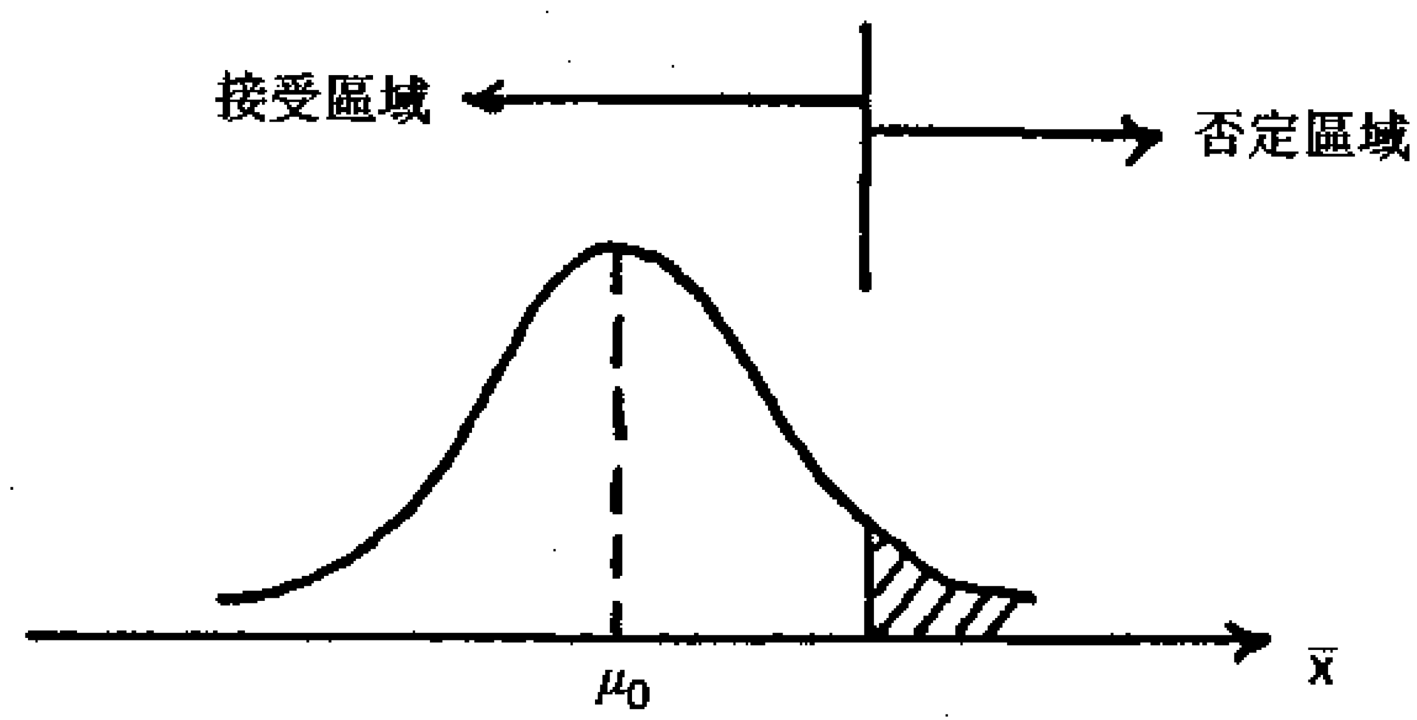
內容	時間分配	教學建議
		例一 設總體的平均值為 μ，方差為 σ^2、X_1、X_2、X_3 為隨機樣本。 令 $T_1=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$、$T_2=\frac{X_1+2X_2}{3}$、$T_3=\frac{X_1+2X_2+3X_3}{3}$。 T_1、T_2 及 T_3 均為 μ 的估計量。 學生不難計算得 μ 的無偏估計量為 T_1 及 T_2，而 T_1 為 T_1、T_2 及 T_3 三者之中的最佳估計量。 *例二* 兩個大小為 n 及 3n 的隨機樣本分別取自兩個常態分佈。前者的平均值為 μ，方差為 σ^2。後者的平均值為 3μ，方差為 $3\sigma^2$。若 $\overline{X}_1$ 及 $\overline{X}_2$ 分別為兩者的樣本平均值，且 $a+3b=1$，試證明 $a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 為 μ 的無偏估計值。 學生須知道樣本平均值 $\overline{X}$ 是總體平均值的最有效估計量。但是，他們無須知道上述性質的證明。 *例三* 以下 7 個樣本均取自一隨機樣本： 9.30, 9.61, 8.27, 8.90, 9.14, 9.90, 9.10 總體平均值的最有效估計為 $\frac{\Sigma x}{n}=\frac{9.30+9.61+\ldots+9.10}{7}\approx 9.17$ *例四* 設一顆不公正骰子擲出「6」的概率為 p。小平欲試驗 p 的值，於是將骰子投擲 100 次並紀錄得出現「6」的次數為 20。小惠獨立地進行同一試驗。她將骰子投擲 200 次並紀錄得 50 個「6」的出現次數。學生須懂得利用公式 $E(P_s)=p$ 計算小平和小惠所求得 p 的估值。對於能力較高的學生，教師可引導他們利用合併方法改善兩人所得的估值。(p的合併估計值可以由公式 $\hat{p}=\frac{n_1 P_{s1}+n_2 P_{s2}}{n_1+n_2}$ 求出)

內容	時間分配	教學建議
21.3 已知方差的常態分佈的平均值的置信區間	6	教師應指出，總體參數區間估計是建立一區間使它包含未知參數的概率等於一規定數值。學生須認識95%及99%置信區間為常用置信區間。 教師須示範如何在已知方差 σ^2 的情況下，利用置信區間來估計常態分佈的平均值。學生應了解當樣本數目為 n 時，樣本平均值 $\overline{X}$ 為常態分佈，其平均值為 μ，方差為 $\frac{\sigma^2}{n}$。經標準化後，$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 且 $Z\sim N(0,\ 1)$。學生該知道，$N(0,\ 1)$ 的中央95%數據位於 ±1.96 之間，即 $P(-1.96\leqslant\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant1.96)=0.95$ 或 $P(\overline{X}-1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}})=0.95$ 因此，當 $\overline{x}$ 為 $\overline{X}$ 的函數值時， $(\overline{x}-1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}，\overline{x}+1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 為 μ 的一個95%置信區間。 *例一* 12個樣本的質量(以 g 作單位)為 200, 204, 196, 198, 210, 189, 197, 221, 205, 203, 196, 199 若這些樣本取自一標準差為 10g 的正態分佈，試計算平均質量的95%置信區間。 *例二* 一部機器生產 10 000 件物品，其中300件不合規格。當計算不合規格概率 p 的95%置信區間時，教師須引導學生以 $\frac{300}{10\,000}$ 作為 p 的估值，又以 $\frac{\left(\frac{300}{10\,000}\right)\left(\frac{9\,700}{10\,000}\right)}{10\,000}$ 為 $\frac{pq}{n}$ 的估值。利用近似分佈 $P_s\sim N(p,\frac{pq}{n})$，學生可用同樣方法解決這類問題。

內容	時間分配	教學建議
21.4 假設檢驗	6	教師可以利用生活上的例子來介紹假設檢驗的概念，例如抽取一些樣本來決定某種燈泡的平均壽命是否不少於 2 000 小時等。教師應清楚解釋及舉例說明「零假設」、「備擇假設」、「顯著性水平」等名詞及它們的常用符號，(即 H_0、H_1 及 α)。此外，學生亦須認識「臨界點」、「臨界域」、「接受區域」及「否定區域」等名稱。以下是一些典型例子。 *例一* 由一部機器生產的鐵釘長度為常態分佈，方差為 0.26 mm²。原先設定機器生產出來的鐵釘長 30 mm。最近懷疑機器出現故障，經抽取 50 個樣本發現機釘的平均長度為 30.2 mm。 (*a*) 以5%的顯著性水平，檢驗鐵釘長度的平均值為 30 mm 這一假設是否真確。 (*b*) 以5%的顯著性水平，檢驗鐵釘的長度的平均值是否大於 30 mm。 教師可與學生討論如何設定問題 (*a*) 及 (*b*) 的備擇假設，從而導出單尾檢驗及雙尾檢驗的概念如下： (*a*) 雙尾檢驗  現時 $\mu_0=30$, $\alpha=0.05$

內容	時間分配	教學建議

(*b*) 單尾檢驗



例二
某種牌子的狗隻罐裝食物製造商宣稱在各種同類食物中，75%的幼犬喜愛他製造的一種牌子。現隨機抽出200隻幼犬，發現135隻選擇這牌子的食物。以5%的顯著性水平，試檢驗製造商所宣傳的真確性。

在這例子中，教師須指出幼犬的百分率可視作成功比例 P_s，且它的分佈近似 $N(P, \frac{pq}{n})$。

21.5 I型及II型誤差 | 6

當學生已熟習假設檢驗的運作後，教師可引導學生達至如下表所列的四個可能發生的結果：

真實情況	檢驗結果	備註
1. H_0 為真	接受 H_0	正確決定
2. H_0 為真	否定 H_0	產生I型誤差
3. H_0 為假	接受 H_0	產生II型誤差
4. H_0 為假	否定 H_0	正確決定

內容	時間分配	教學建議

學生容易發覺：

$P(\text{I型誤差}) = P(\text{否定 } H_0 \mid H_0 \text{為真})$

及

$P(\text{II型誤差}) = P(\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{為假})$。

以下是一些典型的例子：

例一
已知一個箱子載着 (H_0)10個白球和90個黑球或 (H_1)50個白球和50個黑球。為了檢驗 H_0 及 H_1 這兩個假設，從箱子中抽出4個球(抽出的球不放回箱中)。若抽出的全部是黑球，我們便接受假設 H_0，否則否定 H_0。

在此例中，學生應利用上面的關係求得觸犯I型及II型誤差的概率。

例二
現將一些材料混合，製造出能承受2 000N重力的混凝土。若製造出來的混凝土只能承受少於1 800N的重力時我們便須改變材料的成份。已知混凝土的承受力的標準差為200N。現抽取一些樣本檢驗以下兩假設

$H_0 : \mu = 2\,000\text{N}$

$H_1 : \mu = 1\,800\text{N}$

試求樣本數目，使

$P(\text{I型誤差}) = 0.05$

$P(\text{II型誤差}) = 0.1$

例三
以一個質量10kg的樣本，檢驗一量重器的刻度25次。設每次檢驗結果是互相獨立的常態分佈，且標準差為0.200kg。設 μ 為量重器的真實讀數。

(*a*) 試說明應檢驗的假設。

內容	時間分配	教學建議
		(*b*) 若發現 $\bar{x} \geq 10.1032$ 或 $\bar{x} \leq 9.8968$，我們便須將量重器更換刻度。試求在無必要的情況下，更改刻度的概率，並說明所產生的誤差名稱。 (*c*) 試分別就 $\mu = 10.1$ 及 $\mu = 9.8$ 的情況，在無必要的情況下更改刻度的概率，並說明所產生的誤差名稱。
	27	